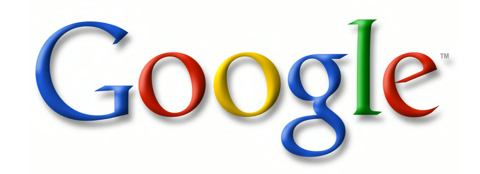
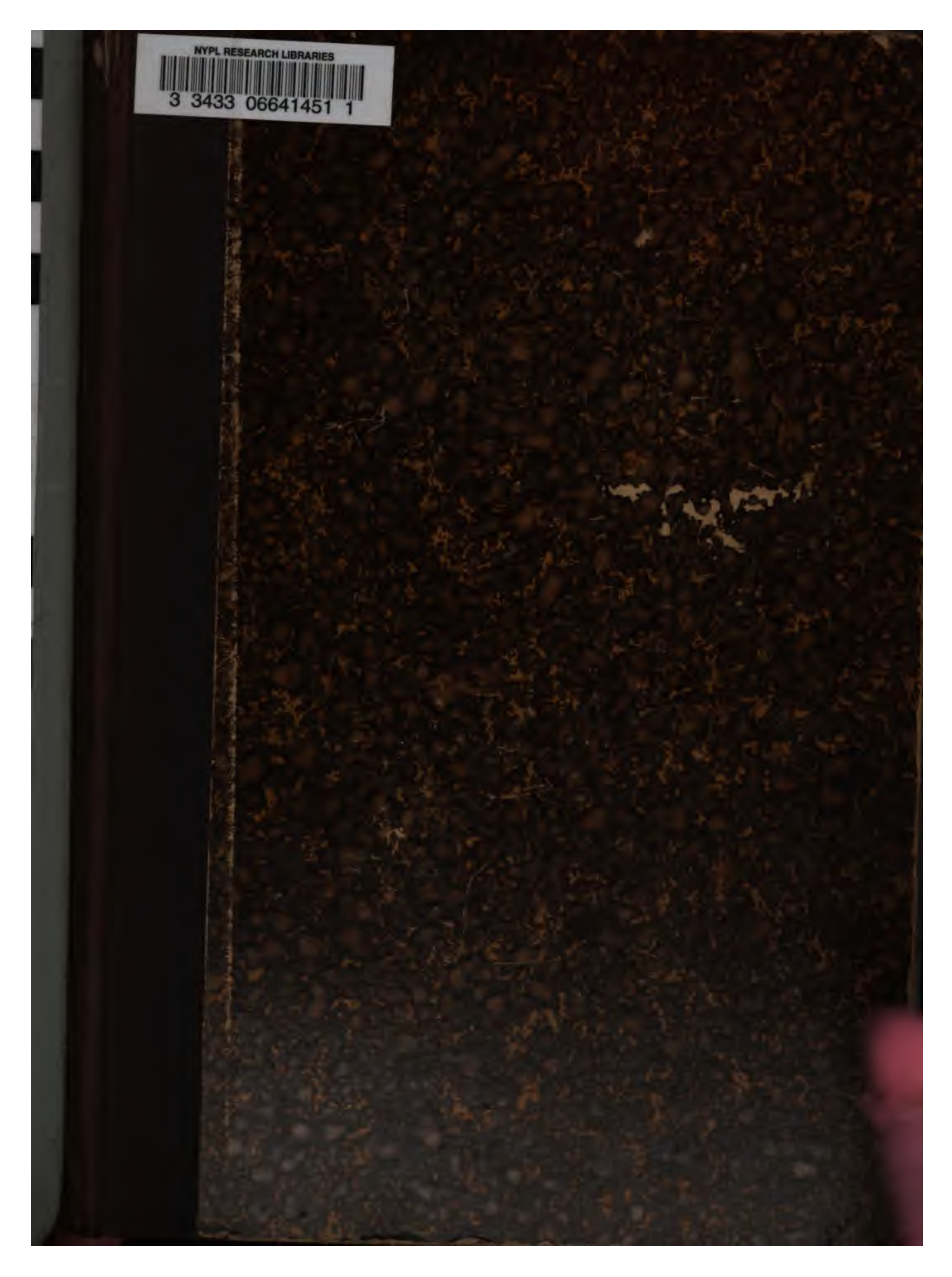



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641451 1

E [illegible]
70

Indeciso. Beltrami 1891. p. 9.

D. p. 146: Indetermination

D. p. 147: „Nous nous contenterons de ce double aperçu, en l'absence d'une théorie plus satisfaisante." (Vgl. Beltrami, 1892, p. 4.)

D p. 112: $\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases}$ D p. 110: $\begin{cases} \alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \\ \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \\ \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \end{cases}$

αβγ wird von [illegible] mit [illegible] und Ω mit [illegible] bezeichnet.

Diese Kraft [illegible] nach Maxwell die polare Kraft [Maxwell II. p. 23]. ~~Maxwell bezeichnet dieselbe als die wirkliche Kraft, als the actual force [Maxwell II. p. 24]~~

Entsprechend [illegible] Beltrami [illegible] apolare Kraft [illegible] 1891, p. 9 u. 14 [illegible]

Andererseits bezeichnet Maxwell die abc als die actual force [Maxw II. p. oder aber auch als die magnetische Induction Maxw. II. p. 29.

[illegible]
[illegible] I. p. 265

I p. 16
[illegible] } zwei inco[illegible]
[illegible]

I p. 31. Elasticität [illegible]
[illegible] p. 36 [illegible] Elasticität [illegible]

[illegible]



μ.

$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [illegible]

μ. pg. 114. 115 Magn[illegible] [illegible] Capacität
[illegible] pg. 115 $\mu \approx 1$ [illegible] [illegible] magnétique induction

pg. 151 Magnetismus [illegible] [illegible]
[illegible] Perméabilité magnétique

pg 200 $\mu = 1$ im [illegible] System.

K

pg. 8. K: Specifischen Inductionsver=
mögen (Pouvoir inducteur spécifique).

pg. 13 K scheint eine gegebene Function
von x, y, z zu sein, und insbesondere
constant zu sein für ein homogenes
Dielectricum.

Vergl. pg. 9.

pg. 56 —

pg. 60. In der Luft: $K=1$

pg. 202. { Im Vacuum: $K=1$.
{ im elektrostatischen System.

C.

p. 94. [illegible]

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

p. 5 $\frac{i}{[illegible]} = u$ ([illegible]geschwindigkeit)

p. 145. Einführung von [illegible] elektromagnet. Moment

p. 14. p. 184.

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

I

LES THÉORIES DE MAXWELL ET LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA LUMIÈRE

Leçons professées pendant le second semestre 1888-89

PAR H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

Rédigées par J. BLONDIN, agrégé de l'Université

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58

1890



INTRODUCTION

La première fois qu'un lecteur français ouvre le livre de Maxwell, un sentiment de malaise, et souvent même de défiance se mêle d'abord à son admiration. Ce n'est qu'après un commerce prolongé et au prix de beaucoup d'efforts, que ce sentiment se dissipe. Quelques esprits éminents le conservent même toujours.

Pourquoi les idées du savant anglais ont-elles tant de peine à s'acclimater chez nous ? C'est sans doute que l'éducation reçue par la plupart des Français éclairés les dispose à goûter la précision et la logique avant toute autre qualité.

Les anciennes théories de la physique mathématique nous donnaient à cet égard une satisfaction complète. Tous nos maîtres, depuis Laplace jusqu'à Cauchy ont procédé de la même manière. Partant d'hypothèses nettement énoncées, ils en ont déduit

toutes les conséquences avec une rigueur mathématique, et les ont comparées ensuite avec l'expérience. Ils semblent vouloir donner à chacune des branches de la physique la même précision qu'à la Mécanique Céleste.

Pour un esprit accoutumé à admirer de tels modèles, une théorie est difficilement satisfaisante. Non seulement il n'y tolèrera pas la moindre apparence de contradiction, mais il exigera que les diverses parties en soient logiquement reliées les unes aux autres et que le nombre des hypothèses distinctes soit réduit au minimum.

Ce n'est pas tout, il aura encore d'autres exigences qui me paraissent moins raisonnables. Derrière la matière qu'atteignent nos sens et que l'expérience nous fait connaître, il voudra voir une autre matière, la seule véritable à ses yeux, qui n'aura plus que des qualités purement géométriques et dont les atomes ne seront plus que des points mathématiques soumis aux seules lois de la Dynamique. Et pourtant ces atomes indivisibles et sans couleur, il cherchera, par une inconsciente contradiction, à se les représenter et par conséquent à les rapprocher le plus possible de la matière vulgaire.

C'est alors seulement qu'il sera pleinement satisfait et s'imaginera avoir pénétré le secret de l'Uni-

vers. Si cette satisfaction est trompeuse, il n'en est pas moins pénible d'y renoncer.

Ainsi, en ouvrant Maxwell, un Français s'attend à y trouver un ensemble théorique aussi logique et aussi précis que l'Optique physique fondée sur l'hypothèse de l'éther ; il se prépare ainsi une déception que je voudrais éviter au lecteur en l'avertissant tout de suite de ce qu'il doit chercher dans Maxwell et de ce qu'il n'y saurait trouver.

Maxwell ne donne pas une explication mécanique de l'électricité et du magnétisme ; il se borne à démontrer que cette explication est possible.

Il montre également que les phénomènes optiques ne sont qu'un cas particulier des phénomènes électromagnétiques. De toute théorie de l'électricité, on pourra donc déduire immédiatement une théorie de la lumière.

La réciproque n'est malheureusement pas vraie ; d'une explication complète de la lumière, il n'est pas toujours aisé de tirer une explication complète des phénomènes électriques. Cela n'est pas facile, en particulier, si l'on veut partir de la théorie de Fresnel ; cela ne serait sans doute pas impossible ; mais on n'en arrive pas moins à se demander si l'on ne va pas être forcé de renoncer à d'admirables résultats que l'on croyait définitivement acquis. Cela semble un

pas en arrière ; et beaucoup de bons esprits ne veulent pas s'y résigner.

Quand le lecteur aura consenti à borner ainsi ses espérances, il se heurtera encore à d'autres difficultés ; le savant anglais ne cherche pas à construire un édifice unique, définitif et bien ordonné, il semble plutôt qu'il élève un grand nombre de constructions provisoires et indépendantes, entre lesquelles les communications sont difficiles et quelquefois impossibles.

Prenons comme exemple le chapitre où l'on explique les attractions électrostatiques par des pressions et des tensions qui règneraient dans le milieu diélectrique. Ce chapitre pourrait être supprimé sans que le reste du volume en devînt moins clair et moins complet, et d'un autre côté il contient une théorie qui se suffit à elle-même. et on pourrait le comprendre sans avoir lu une seule des lignes qui précèdent ou qui suivent. Mais il n'est pas seulement indépendant du reste de l'ouvrage ; il est difficile de le concilier avec les idées fondamentales du livre, ainsi que le montrera plus loin une discussion approfondie ; Maxwell ne tente même pas cette conciliation, il se borne à dire : I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical consi-

derations for these stresses in the dielectric (2e édition, tome I, page 154).

Cet exemple suffira pour faire comprendre ma pensée ; je pourrais en citer beaucoup d'autres. Ainsi, qui se douterait, en lisant les pages consacrées à la polarisation rotatoire magnétique qu'il y a identité entre les phénomènes optiques et magnétiques ?

On ne doit donc pas se flatter d'éviter toute contradiction ; mais il faut en prendre son parti. Deux théories contradictoires peuvent en effet, pourvu qu'on ne les mêle pas, et qu'on n'y cherche pas le fond des choses, être toutes deux d'utiles instruments de recherches, et peut-être la lecture de Maxwell serait-elle moins suggestive s'il ne nous avait pas ouvert tant de voies nouvelles divergentes.

Mais l'idée fondamentale se trouve de la sorte un peu masquée. Elle l'est si bien, que dans la plupart des ouvrages de vulgarisation, elle est le seul point qui soit complètement laissé de côté.

Je crois donc devoir, pour en mieux faire ressortir l'importance, expliquer dans cette introduction en quoi consiste cette idée fondamentale.

Dans tout phénomène physique, il y a un certain nombre de paramètres que l'expérience atteint directement et qu'elle permet de mesurer.

Je les appelle

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

L'observation nous fait connaître ensuite les lois des variations de ces paramètres et ces lois peuvent généralement se mettre sous la forme d'équations différentielles qui lient entre eux les q et le temps.

Que faut-il faire pour donner une interprétation mécanique d'un pareil phénomène?

On cherchera à l'expliquer soit par les mouvements de la matière ordinaire, soit par ceux d'un ou plusieurs fluides hypothétiques.

Ces fluides seront considérés comme formés d'un très grand nombre de molécules isolées ; soient $m_1, m_2 \ldots, m_p$ les masses de ces molécules ; soient x_i, y_i, z_i, les coordonnées de la molécule m_i.

On devra de plus supposer qu'il y a conservation de l'énergie, et par conséquent qu'il existe une certaine fonction — U des $3p$ coordonnées x_i, y_i, z_i, qui joue le rôle de fonction des forces. Les $3p$ équations du mouvement s'écriront alors :

$$(1) \qquad \begin{aligned} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dx_i} \\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dy_i} \\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dz_i} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique du système est égale à :

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

L'énergie potentielle est égale à U et l'équation qui exprime la conservation de l'énergie s'écrit :

$$T + U = \text{const.}$$

On aura donc une explication mécanique complète du phénomène, quand on connaîtra d'une part la fonction des forces — U et que d'autre part on saura exprimer les $3p$ coordonnées x_i, y_i, z_i à l'aide de n paramètres q.

Si nous remplaçons ces coordonnées par leurs expressions en fonctions des q, les équations (1) prendront une autre forme. L'énergie potentielle U deviendra une fonction des q; quant à l'énergie cinétique T, elle dépendra non seulement des q, mais de leurs dérivées q' et elle sera homogène et du second degré par rapport à ces dérivées. Les lois du mouvement seront alors exprimées par les équations de Lagrange :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_k'} - \frac{dT}{dq_k} + \frac{dU}{dq_k} = 0.$$

Si la théorie est bonne, ces équations (2) devront

être identiques aux lois expérimentales directement observées.

Ainsi pour qu'une explication mécanique d'un phénomène soit possible, il faut qu'on puisse trouver deux fonctions U et T, dépendant, la première des paramètres q seulement, la seconde de ces paramètres et de leurs dérivées ; que T soit homogène du deuxième ordre par rapport à ces dérivées et que les équations différentielles déduites de l'expérience puissent se mettre sous la forme (2).

La réciproque est vraie ; toutes les fois qu'on pourra trouver ces deux fonctions T et U, on sera certain que le phénomène est susceptible d'une explication mécanique.

Soient en effet U $(q_1, \ldots q_2, \ldots q_n)$, T $(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n ; \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ou plus simplement U (q_k), T (q'_k, q_k). ces deux fonctions.

Que reste-t-il à faire pour obtenir l'explication complète ?

Il reste à trouver p constantes $m_1, \ldots, m_2, m_p$; et 3 p fonctions des q :

$$\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad \psi_i(q_1, q_2 \ldots, q_n), \qquad \theta_i(q_1, q_2 \ldots, q_n)$$

où

$$(i = 1, 2 \ldots p)$$

ou plus brièvement

$$\varphi_i(q_k), \qquad \psi_i(q_k), \qquad \theta_i(q_k)$$

que l'on puisse considérer comme les masses et les coordonnées

$$x_i = \varphi_i, \qquad y_i = \psi_i, \qquad z_i = \theta_i$$

des p molécules du système.

Pour cela ces fonctions devront satisfaire à la condition suivante ; on devra avoir identiquement :

$$T(q_k', q_k) = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{1}{2}\Sigma m_i'(\varphi_i'^2 + \psi_i'^2 + \theta_i'^2)$$

où :

$$\varphi_i' = q_1' \frac{d\varphi_i}{dq_1} + q_2' \frac{d\varphi_i}{dq_2} + \ldots\ldots + q_n' \frac{d\varphi_i}{dq_n}, \text{ etc.}$$

Comme le nombre p peut être pris aussi grand que l'on veut, on peut toujours satisfaire à cette condition, et cela d'une infinité de manières.

Ainsi dès que les fonctions $U(q_k)$, $T(q'_k, q_k)$ existent,

on peut trouver une infinité d'explications mécaniques du phénomène.

Si donc un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendront également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience.

Ce qui précède est confirmé par l'histoire de toutes les parties de la physique ; en Optique par exemple, Fresnel croit la vibration perpendiculaire au plan de polarisation ; Neumann la regarde comme parallèle à ce plan. On a cherché longtemps un « *experimentum crucis* » qui permît de décider entre ces deux théories et on n'a pu la trouver.

De même, sans sortir du domaine de l'électricité, nous pouvons constater que la théorie des deux fluides et celle du fluide unique rendent toutes deux compte d'une façon également satisfaisante de toutes les lois observées en électrostatique.

Tous ces faits s'expliquent aisément grâce aux propriétés des équations de Lagrange que je viens de rappeler.

Il est facile de comprendre maintenant quelle est l'idée fondamentale de Maxwell.

Pour démontrer la possibilité d'une explication mécanique de l'électricité, nous n'avons pas à nous

préoccuper de trouver cette explication elle-même, il nous suffit de connaître l'expression des deux fonctions T et U qui sont les deux parties de l'énergie, de former avec ces deux fonctions les équations de Lagrange et de comparer ensuite ces équations avec les lois expérimentales.

Entre toutes ces explications possibles, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut ? Un jour viendra peut-être où les physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu ; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses.

Notre choix ne peut donc plus être guidé que par des considérations où la part de l'appréciation personnelle est très grande ; il y a cependant des solutions que tout le monde rejettera à cause de leur bizarrerie et d'autres que tout le monde préfèrera à cause de leur simplicité.

En ce qui concerne l'électricité et le magnétisme, Maxwell s'abstient de faire aucun choix. Ce n'est pas qu'il dédaigne systématiquement tout ce que ne peuvent atteindre les méthodes positives ; le temps qu'il a consacré à la théorie cinétique des gaz en fait suffisamment foi. J'ajouterai [illegible] ›u grand

ouvrage, il ne développe aucune explication complète, il avait antérieurement tenté d'en donner une dans un article du *Philosophical Magazine*. L'étrangeté et la complication des hypothèses qu'il avait été obligé de faire, l'avaient amené ensuite à y renoncer.

Le même esprit se retrouve dans tout l'ouvrage. Ce qu'il y a d'essentiel, c'est-à-dire ce qui doit rester commun à toutes les théories est mis en lumière ; tout ce qui ne conviendrait qu'à une théorie particulière est presque toujours passé sous silence. Le lecteur se trouve ainsi en présence d'une forme presque vide de matière qu'il est d'abord tenté de prendre pour une ombre fugitive et insaisissable. Mais les efforts auxquels il est ainsi condamné le forcent à penser et il finit par comprendre ce qu'il y avait souvent d'un peu artificiel dans les ensembles théoriques qu'il admirait autrefois.

C'est en électrostatique que ma tâche a été le plus difficile ; c'est là surtout en effet que la précision fait défaut. Un des savants français qui ont le plus appro-

fondi l'œuvre de Maxwell me disait un jour : « Je comprends tout dans son livre, excepté ce que c'est qu'une boule électrisée. » Aussi ai-je cru devoir insister assez longuement sur cette partie de la science. Je ne voulais pas conserver à la définition du déplacement électrique cette sorte d'indétermination qui est la cause de toutes ses obscurités ; je ne voulais pas non plus, en précisant la pensée de l'auteur, la dépasser et par conséquent la trahir.

J'ai pris le parti d'exposer successivement deux théories complètes, mais entièrement différentes. J'espère que le lecteur distinguera ainsi sans peine ce qu'il y a de commun à ces deux théories et par conséquent ce qu'elles contiennent d'essentiel. Il sera averti en outre qu'aucune des deux ne représente le fond des choses. Dans la première j'admets l'existence de deux fluides, électricité et fluide inducteur, qui peuvent être aussi utiles que les deux fluides de Coulomb, mais qui n'ont pas plus de réalité objective. De même l'hypothèse de la constitution cellulaire des diélectriques, n'est destinée qu'à faire mieux comprendre l'idée de Maxwell en la rapprochant des idées qui nous sont plus familières En agissant ainsi, je n'ajoute rien à la pensée de l'auteur anglais et je n'en retranche rien non plus ; car il importe d'observer que Maxwell n'a jamais regardé « what we may call

an electric displacement » comme un véritable mouvement d'une véritable matière.

Je suis très reconnaissant à M. Blondin qui a bien voulu recueillir et rédiger les leçons que j'ai professées pendant le semestre d'été de 1888, ainsi qu'il l'avait déjà fait pour celles que j'avais consacrées à l'optique physique.

Sa tâche a été cette fois plus difficile. La science a marché avec une rapidité que rien ne permettait de prévoir au moment où j'ai ouvert ce cours. Depuis cette époque la théorie de Maxwell a reçu, d'une manière éclatante, la confirmation expérimentale qui lui manquait. Je n'avais pu exposer dans mes leçons que les premières expériences de Rontgen et de Hertz, auxquelles les conquêtes plus récentes et plus complètes de ce dernier savant ont enlevé beaucoup d'intérêt. M. Blondin a donc dû remanier et étendre considérablement cette partie du cours.

Le chapitre XIII où sont exposées ces diverses tentatives de vérification expérimentale, est entièrement son œuvre personnelle.

J'ai cru toutefois qu'il convenait de renvoyer à un autre ouvrage les quelques pages qu'il avait rédigées au sujet des expériences de Hertz. Cet ouvrage où seront reproduites les leçons que j'ai professées en 1890 aura pour objet non seulement les théories

électrodynamiques de Helmholtz, mais aussi la discussion mathématique des expériences de Hertz et paraîtra très prochainement. Il est donc préférable d'en rapprocher la description succincte des expériences.

XX.

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

FORMULES DE L'ÉLECTROSTATIQUE

1. Avant d'entreprendre l'exposé des idées de Clerk Maxwell sur l'électricité, nous commencerons par résumer rapidement les hypothèses fondamentales des théories actuellement en usage et nous rappellerons les théorèmes généraux de l'électricité statique, en introduisant dans les formules les notations de Maxwell.

2. Théorie des deux fluides. — Dans la théorie *des deux fluides,* les corps qui ne sont pas électrisés, en d'autres termes, qui sont à l'état neutre, sont supposés chargés de quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative. On admet en outre que ces quantités sont assez grandes pour qu'aucun procédé d'électrisation ne permette d'enlever à un corps toute son électricité de l'une ou l'autre espèce.

3. Des expériences de Coulomb et de la définition des quantités d'électricité, il résulte que deux corps chargés de quantités m et m' d'électricité, exercent entre eux une fo

donnée par l'expression

$$(1) \qquad F = -f\frac{mm'}{r^2},$$

où r désigne la distance des deux corps électrisés, supposée très grande par rapport aux dimensions de ces corps. Une valeur négative de F indique une répulsion entre les corps ; à une valeur positive correspond une force attractive. f est un coefficient numérique dont la valeur dépend de l'unité adoptée pour la mesure des quantités d'électricité.

4. Théorie du fluide unique. — Dans la théorie du *fluide unique,* à laquelle se rattache la théorie de Maxwell, un corps à l'état neutre est supposé contenir une certaine quantité d'électricité positive. Quand un corps contient une quantité d'électricité positive plus grande que cette charge normale, il est dit chargé positivement ; dans le cas contraire, il est chargé négativement.

Pour expliquer dans cette théorie les attractions et les répulsions électriques, on admet que les molécules d'électricité se repoussent, que les molécules de matière se repoussent également, tandis qu'il y a au contraire attraction entre les molécules d'électricité et les molécules de matière. Ces attractions et ces répulsions sont d'ailleurs supposées s'exercer suivant la droite qui joint les molécules et en raison inverse du carré de la distance.

Dans ces conditions, la quantité d'électricité positive contenue dans un corps à l'état neutre, doit être telle que la répulsion qu'elle exerce sur une molécule électrique extérieure au corps soit égale à l'attraction exercée sur cette molécule par la matière du corps.

5. Expression de la force électrique dans la théorie du fluide unique. — Les forces qui agissent entre deux corps électrisés sont alors au nombre de quatre : celle qui s'exerce entre les charges électriques, la répulsion de la matière qui constitue les corps, enfin les deux attractions qui ont lieu entre l'électricité qui charge l'un des corps et la matière qui forme l'autre. Si nous désignons par r la distance qui sépare les corps, par μ et μ' leurs charges électriques respectives, et par ν et ν' leurs masses matérielles, nous aurons :

Pour la force s'exerçant entre les masses matérielles,

$$-\alpha \frac{\nu\nu'}{r^2};$$

pour les attractions entre l'électricité et la matière,

$$\beta \frac{\nu\mu'}{r^2} \quad \text{et} \quad \beta \frac{\nu'\mu}{r^2};$$

pour la répulsion entre les charges électriques

$$-\gamma \frac{\mu\mu'}{r^2}.$$

La résultante de ces forces sera

$$F = \frac{1}{r^2}[-\alpha\nu\nu' + \beta(\nu\mu' + \nu'\mu) - \gamma\mu\mu'],$$

ou

$$(2) \quad F = -\frac{1}{r^2}\left[\gamma\left(\mu - \frac{\nu\beta}{\gamma}\right)\left(\mu' - \frac{\nu'\beta}{\gamma}\right) + \nu\nu'\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\right].$$

[redacted] générale de la force qui s'exerce entre

rce doit se réduire à l'attraction

newtonnienne, quand les corps considérés sont à l'état neutre. C'est ce qui aura lieu si la charge normale d'un corps à l'état neutre a pour valeur $\frac{\nu\beta}{\gamma}$ et si, puisque la force doit être attractive, on a $\alpha < \frac{\beta^2}{\gamma}$.

6. Si nous désignons par m l'excès de charge d'un conducteur électrisé sur sa charge normale à l'état neutre, la formule (2) devient

$$F = -\gamma \frac{mm'}{r^2} + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha\right) \frac{\nu\nu'}{r^2}.$$

Elle se réduit à la formule (1) quand on laisse de côté l'attraction newtonnienne. La théorie du fluide unique conduit donc pour les attractions et les répulsions électriques à la même expression que la théorie des deux fluides. Toutes les conséquences de la formule (1) subsistent par conséquent dans la théorie du fluide unique.

7. Unité électrostatique de quantité. — Par le choix d'une unité convenable de quantité d'électricité, on peut faire en sorte que le coefficient numérique f de la formule (1) devienne égal à 1. L'unité de quantité ainsi choisie est *l'unité électrostatique de quantité d'électricité;* c'est la quantité d'électricité qui, agissant sur une quantité égale placée *dans l'air* à l'unité de distance, exerce sur elle une force égale à l'unité de force.

On a alors pour la valeur de la force qui s'exerce entre deux masses électriques m et m' placées dans l'air à une distance r,

$$F = -\frac{mm'}{r^2}. \tag{3}$$

8. Potentiel. Composantes de la force électrique. — On appelle potentiel en un point *le travail de la force électrique agissant sur l'unité d'électricité positive quand celle-ci va du point considéré à l'infini.*

Dans le cas particulier où les masses électriques sont distribuées dans l'air, le potentiel a pour valeur $\sum \frac{m_i}{r_i}$, r_i étant la distance du point considéré à la masse m_i et la sommation s'étendant à toutes les masses électriques du champ.

Nous désignerons par ψ le potentiel en un point P, pour nous conformer aux notations de Maxwell.

Si en P se trouve une masse électrique égale à m', les composantes suivant trois axes de coordonnées de la résultante des actions électrostatiques qui s'exercent sur P, sont,

$$-m'\frac{d\psi}{dx}, \qquad -m'\frac{d\psi}{dy}, \qquad -m'\frac{d\psi}{dz}.$$

9. Si on suppose le point P à l'intérieur d'un conducteur homogène et en équilibre électrique la résultante des actions électrostatiques qui s'exercent sur ce point doit être nulle car autrement l'équilibre serait détruit. Les dérivées partielles du potentiel, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dz}$ sont donc nulles; par suite le potentiel est constant à l'intérieur du conducteur.

10. Flux de force. — Considérons un élément de surface $d\omega$ et par le centre de gravité G (*fig.* 1) de cet élément menons la demi-normale GN dans un sens quelconque que nous prendrons comme sens positif. Si en G se trouve une molécule d'électricité de masse m', cette molécule

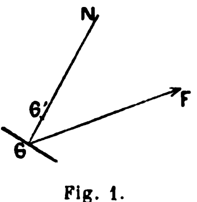


Fig. 1.

est soumise à une force GF dont les composantes suivant les trois axes de coordonnées sont

$$-m'\frac{d\psi}{dx}, \qquad -m'\frac{d\psi}{dy}, \qquad -m'\frac{d\psi}{dz},$$

ψ désignant la valeur du potentiel en G. En appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la demi-normale GN, la projection de la force GF sur GN a pour expression

$$-m'\left(\alpha\frac{d\psi}{dx}+\beta\frac{d\psi}{dy}+\gamma\frac{d\psi}{dz}\right),$$

ou

$$-m'\frac{d\psi}{dn},$$

dn désignant une longueur infiniment petite GG′ portée dans le sens positif de la normale et $d\psi$ la variation du potentiel quand on passe du point G au point G′.

Si la quantité d'électricité située en G est égale à l'unité, la composante normale de la force qui s'exerce sur elle est $-\frac{d\psi}{dn}$. Le produit changé de signe,

$$\frac{d\psi}{dn}\,d\omega$$

de cette force par l'élément de surface $d\omega$ est ce que nous appellerons le *flux de force à travers l'élément* $d\omega$. Le *flux de force à travers une surface finie* sera la valeur de l'intégrale

$$\int\frac{d\psi}{dn}\,d\omega$$

étendue à tous les éléments de la surface.

11. Théorème de Gauss. — Lorsque la surface est fermée la valeur absolue de cette intégrale est $4\pi M$, M désignant la quantité totale d'électricité *libre* contenue à l'intérieur de la surface ; quant au signe il dépend du choix de la direction positive de la normale. On peut convenir de prendre pour le flux de force la valeur $-4\pi M$ ce qui revient à prendre pour direction positive de la normale en un point de la surface celle qui est extérieure à la surface ; on dit alors que le flux *entre* dans la surface. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le flux de force qui entre dans une surface fermée à l'intérieur de laquelle se trouve une quantité d'électricité libre M *est égal à* $-4\pi M$.

12. Relation de Poisson. — Il existe entre la densité électrique cubique ρ en un point d'un corps électrisé et les dérivées secondes du potentiel en ce point une relation importante due à Poisson. Elle s'obtient très simplement en écrivant, d'après le théorème précédent, que le flux de force qui entre à travers un parallèlipipède rectangle infiniment petit contenant le point considéré est égal à $-4\pi\rho\, dx\, dy\, dz$, dx, dy, dz, étant les longueurs des côtés de ce parallélipipède. On a alors,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2}=-4\pi\rho.$$

Maxwell désigne le premier membre de cette relation par $-\Delta^2\psi$, notation qui se rattache à la théorie des quaternions dont Maxwell fait d'ailleurs un usage constant. Nous continuerons à désigner cette somme de dérivées secondes par la notation habituelle $\Delta\psi$.

Le potentiel étant constant à l'intérieur d'un conducteur, on a $\Delta\psi = 0$ et par suite, d'après la relation de Poisson, $\rho = 0$. A l'intérieur d'un conducteur, il n'y à donc pas d'électricité libre.

Une autre conséquence de la relation de Poisson est qu'en tout point du diélectrique où il n'y a pas d'électricité libre on a $\Delta\psi = 0$. Par conséquent, le potentiel est une fonction constante à l'intérieur d'un conducteur, tendant vers zéro à l'infini et telle que l'on a $\Delta\psi = 0$ en tout point non électrisé d'un diélectrique.

13. Flux d'induction. — Lorsque le diélectrique qui sépare les conducteurs est un corps autre que l'air les phénomènes électriques mesurables changent de valeur. Aussi a-t-on été conduit à introduire dans les formules un facteur que l'on appelle *pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique. Maxwell le désigne par K.

Le produit du flux de force élémentaire par ce facteur est nommé *flux d'induction.*

Le *flux d'induction à travers une surface finie* est la valeur de l'intégrale

$$\int K \frac{d\psi}{dn} d\omega,$$

étendue à tous les éléments de la surface. Quand la surface est fermée nous admettrons (ce que l'expérience confirme) que la valeur de cette intégrale est $-4\pi M$, la direction positive de la normale étant extérieure à la surface. Dans le cas

où le pouvoir inducteur spécifique est constant on a

$$K \int \frac{d\psi}{dn} \, d\omega = - 4\pi M.$$

14. Potentiel d'une sphère électrisée en un point extérieur. — La considération du flux de force permet de trouver facilement la valeur en un point P (*fig.* 2) du potentiel résultant d'une sphère conductrice électrisée S placée dans l'air. On trouve pour cette vapeur : $\frac{M}{r}$, M désignant la charge de la sphère et r la distance du point au centre de la sphère. De

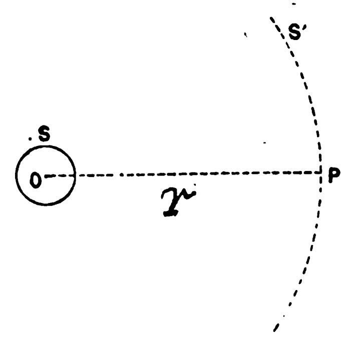


Fig. 2.

même la considération du flux d'induction donne la valeur du potentiel en P quand la sphère est placée dans un diélectrique homogène dont le pouvoir inducteur spécifique est K.

Du centre O de la sphère et avec un rayon égal à OP décrivons une sphère S'. Par raison de symétrie, le potentiel à la même valeur en tout point de S' ; par suite,

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{d\psi}{dr}$$

est constant sur cette surface. On a donc pour le flux d'induction a travers S'

$$\int K \frac{d\psi}{dn} \, d\omega = K \frac{d\psi}{dr} \int d\omega = K \frac{d\psi}{dr} 4\pi r^2.$$

La surface étant fermée le flux d'induction est égal à $-4\pi M$. Par conséquent nous avons

$$K \frac{d\psi}{dr} 4\pi r^2 = -4\pi M,$$

ou

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{K}\frac{M}{r^2},$$

et par suite

$$\psi = \frac{1}{K}\frac{M}{r},$$

la constante d'intégration étant nulle puisque le potentiel a pour valeur zéro quand r est infini.

Le potentiel en un point d'un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique K est donc, dans le cas d'une sphère, égal au quotient par K de la valeur qu'aurait eu le potentiel en ce point si le diélectrique eût été l'air. Il en est encore ainsi si, au lieu d'une sphère conductrice électrisée, le champ électrique est constitué par des masses électriques quelconques.

15. Remarques. — Cette conséquence nous permet de trouver l'expression de la force qui s'exerce entre deux molécules électriques A et A′ de masses m et m' situées dans un diélectrique homogène. En effet, soit ψ la valeur du potentiel au point où se trouve placée la masse m'. La force électrique qui s'exerce sur cette masse est $-m'\frac{d\psi}{dr}$, r désignant la distance des deux molécules supposées seules dans le champ. Or si le diélectrique était l'air, le potentiel au point A′ serait $\frac{m}{r}$; sa valeur dans un diélectrique de pouvoir inducteur spéci-

fique K est donc, d'après ce qui précède, $\frac{1}{K}\frac{m}{r}$ et la dérivée de cette quantité est $-\frac{1}{K}\frac{m}{r^2}$. Par suite, nous obtenons pour la force électrique

$$-m'\frac{d\psi}{dr}=\frac{1}{K}\frac{mm'}{r^2};$$

elle est la K^e partie de la force qui s'exercerait entre les mêmes masses électriques situées dans l'air.

La relation qui existe entre les valeurs que prend le potentiel en un même point suivant que le diélectrique est l'air, ou tout autre corps, permet de savoir comment doivent varier les charges avec le diélectrique pour que le potentiel en un point conserve la même valeur quel que soit le diélectrique. Il est en effet évident que, puisque pour des charges identiques le potentiel se trouve divisé par K, il faut, pour avoir le même potentiel en un point, que les charges situées dans le diélectrique de pouvoir inducteur K, soient K fois plus grandes.

Si donc nous considérons deux petites sphères électrisées et que nous maintenions constante la différence de potentiel entre ces deux sphères, l'attraction qui s'exercera entre elles sera proportionnelle au pouvoir inducteur du diélectrique qui les sépare. En effet, les potentiels étant constants les charges m et m' des deux sphères seront en raison directe de K et l'attraction doit être proportionnelle à $\frac{mm'}{K}$.

Ainsi *l'attraction électrostatique varie en raison directe de* K *si ce sont les potentiels qu'on maintient constants, et en*

raison inverse de K *si ce sont les charges qui demeurent constantes.*

16. Extension de la relation de Poisson. — Comme nous l'avons dit, la relation de Poisson s'obtient en écrivant que le flux de force qui entre à travers les faces d'un parallélipipède rectangle est égal à $-4\pi\rho dxdydz$. Le flux d'induction à travers une surface fermée étant égal à $-4\pi M$, comme le flux de force à travers cette surface, nous trouverons une relation analogue à celle de Poisson en écrivant que le flux d'induction qui entre à travers les faces d'un parallélipipède élémentaire est égal à $-4\pi\rho dxdydz$.

Nous pouvons d'ailleurs arriver très simplement à cette relation en nous servant du lemme qui sert ordinairement à la démonstration du théorème de Green, lemme exprimé analytiquement par l'égalité

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau,$$

dans laquelle la première intégrale est étendue à une surface fermée et la seconde au volume limité par cette surface, α désignant le cosinus de l'angle formé par l'axe des x et la normale à l'élément $d\omega$ de la surface et F une fonction quelconque, mais continue des coordonnées.

Appliquons ce lemme à l'intégrale du flux d'induction à travers une surface fermée,

$$\int K \frac{d\psi}{dn} d\omega = \int K \left(\alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz}\right) d\omega = -4\pi M.$$

Nous avons

$$\int \alpha K \frac{d\psi}{dx} d\omega = \int \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} d\tau,$$

$$\int \beta K \frac{d\psi}{dy} d\omega = \int \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} d\tau,$$

$$\int \gamma K \frac{d\psi}{dz} d\omega = \int \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} d\tau;$$

et en ajoutant

$$\int \left(\frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} \right) d\tau = -4\pi M.$$

Si nous désignons par ρ la densité cubique en chaque point, nous avons

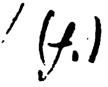
$$M = \int \rho d\tau,$$

et par suite,

$$\int \left(\frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} \right) d\tau = -4\pi \int \rho d\tau.$$

Cette égalité ayant lieu quel que soit le volume considéré, elle sera vraie pour un volume infiniment petit; nous obtenons donc

$$\sum \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} = -4\pi\rho.$$



Dans le cas particulier où le diélectrique est homogène, c'est-à-dire dans le cas où K ne dépend pas des coordonnées, cette relation se réduit à

$$\sum K \frac{d}{dx} \frac{d\psi}{dx} = K\Delta\psi = -4\pi\rho.$$

CHAPITRE II

HYPOTHÈSES DE MAXWELL

17. Fluide inducteur. — La caractéristique de la théorie de Maxwell est le rôle prépondérant qu'y jouent les diélectriques. Maxwell suppose toute la matière des diélectriques occupée par un fluide élastique hypothétique, analogue à *l'éther* qui, en Optique, est supposé remplir les corps transparents; il l'appelle *électricité*. Nous verrons par la suite la raison de cette dénomination, mais comme elle peut introduire dans l'esprit une confusion regrettable pour la clarté de l'exposition nous donnerons le nom de *fluide inducteur* à ce fluide hypothétique, conservant au mot *électricité* sa signification habituelle.

Quand tous les conducteurs situés dans le diélectrique sont à l'état neutre le fluide inducteur est en *équilibre normal.* Quand, au contraire, ces conducteurs sont électrisés et que leur système est dans l'état que l'on définit dans la théorie ordinaire en disant que le système est en équilibre électrique, le fluide inducteur prend un nouvel état d'équilibre que Maxwell appelle *équilibre contraint.*

18. Déplacement électrique. — Lorsqu'une molécule du fluide inducteur est dérangée de sa position d'équilibre normal, Maxwell dit qu'il y a *déplacement électrique*. Les composantes du déplacement sont les accroissements des coordonnées de la molécule ; il les désigne par les lettres f, g, h, et il admet qu'elles ont respectivement pour valeurs :

$$(1)\quad f = -\frac{K\frac{d\psi}{dx}}{4\pi}, \qquad g = -\frac{K\frac{d\psi}{dy}}{4\pi}, \qquad h = -\frac{K\frac{d\psi}{dz}}{4\pi}.$$

Il résulte de cette hypothèse, dont nous verrons l'origine, des relations entre les composantes du déplacement et la quantité d'électricité libre contenue à l'intérieur d'une surface fermée et, d'autre part, entre les dérivées de ces composantes et la densité électrique en un point.

En effet, si nous portons les valeurs des dérivées partielles de ψ, tirées des relations (1) dans l'expression du flux d'induction à travers une surface fermée,

$$\int K \frac{d\psi}{dn}\, d\omega = \int K\left(\alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz}\right) d\omega = -4\pi M,$$

nous obtenons

$$(2)\qquad \int (\alpha f + \beta g + \gamma h)\, d\omega = M$$

En second lieu, si nous portons ces valeurs dans la relation de Poisson étendue au cas d'un diélectrique quelconque, nous avons

$$(3)\qquad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho.$$

/ Diese Formel, verglichen mit pag. L. 379 (4.), zeigt, dass f = −α, g = −β, h = −γ is[illegible]
Somit [illegible] aus (1.) α = [illegible]
mit

19. Incompressibilité du fluide inducteur et de l'électricité. — L'étude des conséquences de ces relations conduit à regarder le fluide inducteur et l'électricité comme deux fluides incompressibles.

D'abord de l'hypothèse de Maxwell sur la valeur des composantes du déplacement en un point il résulte immédiatement que si l'électricité est en mouvement le fluide inducteur y est aussi. En effet, si nous modifions les charges électriques des conducteurs placés à l'intérieur d'un diélectrique, nous faisons varier en même temps la valeur du potentiel ψ en un point quelconque du diélectrique, et, par conséquent les valeurs f, g, h des composantes du déplacement électrique qui sont données par les relations (1).

20. Cela posé considérons une surface fermée dont l'intérieur est occupé par un diélectrique homogène et par des conducteurs en équilibre électrique possédant une charge totale M. Donnons à cette charge un accroissement dM et supposons que le système des conducteurs soit encore en équilibre électrique. Le fluide inducteur passe d'un état d'équilibre contraint à un second état d'équilibre contraint et pendant ce passage il y a déplacement de chacune de ses molécules puisqu'il y a mouvement de l'électricité. Cherchons la quantité de ce fluide qui a traversé la surface fermée. Si dt est le temps infiniment petit pendant lequel s'est effectué le passage de l'état initial du système à l'état final, la quantité de fluide inducteur qui est *sortie* par un élément $d\omega$ de la surface est

$$dq = d\omega dt \mathrm{V}_n,$$

V_n étant la projection de la vitesse du déplacement sur la normale extérieure à la surface fermée. La quantité de fluide inducteur qui sort de la surface est donc, pendant le même temps,

$$dQ = dt \int V_n d\omega.$$

Mais puisque f, g, h désignent les composantes du déplacement, $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$ sont les composantes de la vitesse, et par suite la composante normale V_n a pour valeur

$$V_n = \alpha \frac{df}{dt} + \beta \frac{dg}{dt} + \gamma \frac{dh}{dt}.$$

Portons cette expression dans dQ, nous obtenons

$$dQ = dt \int \left(\alpha \frac{df}{dt} + \beta \frac{dg}{dt} + \gamma \frac{dh}{dt} \right) d\omega.$$

L'intégrale du second membre de cette égalité n'est autre chose que la dérivée par rapport au temps du premier membre de la relation (2). Nous avons donc

$$dQ = dt \frac{dM}{dt} = dM,$$

c'est-à-dire que la quantité de fluide inducteur qui sort de la surface est égale à la quantité d'électricité qui y entre. Tout se passe donc comme si l'électricité chassait le fluide inducteur, ou en d'autres termes, comme si le fluide inducteur et l'électricité étaient deux fluides incompressibles.

21. Remarquons d'ailleurs que l'incompressibilité du fluide inducteur pouvait se déduire immédiatement de la relation (3). Cette relation devient, quand on considère un point du fluide inducteur contenu dans un diélectrique à l'état neutre,

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0.$$

Son premier membre n'est autre que la quantité que nous avons désignée par Θ dans un autre ouvrage [1] et nous avons démontré que la condition $\Theta = 0$ exprimait l'incompressibilité du fluide.

22. Image de l'effet de l'élasticité du fluide inducteur. — Considérons d'une part deux conducteurs A et B (*fig.* 3)

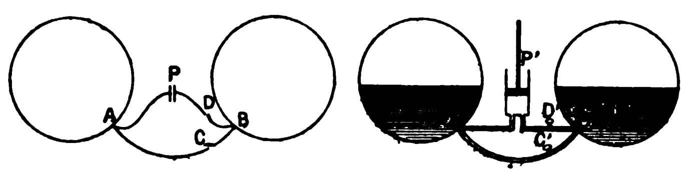


Fig. 3.

réunis entre eux par un fil métallique portant un commutateur C et par un second fil sur le trajet duquel se trouvent une pile P et un commutateur D. Prenons d'autre part deux récipients fermés A′ et B′ renfermant de l'eau et de l'air et réunis entre eux par un canal de communication portant un robinet C′ et par un autre canal sur le trajet duquel se trouvent une pompe P′ et un robinet D′.

[1] Voir *Théorie mathématique de la Lumière*, pages 25 et 26.

Supposons maintenant que les conducteurs A et B étant à l'état neutre on ouvre le commutateur C et qu'on ferme le commutateur D ; il s'établit un courant de courte durée dans le fil ADB et bientôt nous avons un état d'équilibre électrique dans lequel les conducteurs sont chargés d'électricités de noms contraires, A positivement par exemple, et B négativement. Si alors nous ouvrons le commutateur D et fermons le commutateur C, les deux électricités des conducteurs se recombinent à travers le fil ACD et ces conducteurs reviennent à l'état neutre.

23. Pour comprendre le rôle que joue le fluide inducteur dans cette expérience examinons ce qui se passe dans le système des deux vases A′ et B′ quand on fait jouer la pompe et qu'on établit avec les robinets C′ et D′ les communications que nous établissions précédemment avec les commutateurs C et D. Supposons que les niveaux de l'eau dans les vases soient dans un même plan horizontal, fermons le robinet C′, ouvrons le robinet D′ et faisons marcher la pompe ; l'eau passe d'un vase à l'autre, du vase B′ au vase A′ par exemple. Il en résulte une diminution de la force élastique de l'air de B′ et une augmentation de celle de l'air de A′. Si nous fermons le robinet D′ et si nous ouvrons en même temps C′, la différence des forces élastiques de l'air dans les deux récipients fait repasser l'eau de A′ dans B′ jusqu'à ce que les niveaux soient revenus dans le même plan horizontal. Le système est donc revenu dans son état initial comme dans l'expérience électrique et nous pouvons regarder l'eau comme représentant matériellement le fluide électrique ; l'accroissement du volume de l'eau dans A′ et la diminution dans B′

qui résultent de la première phase de l'expérience hydrostatique représenteront les charges positive et négative des conducteurs A et B dans la phase correspondante de l'expérience électrique. Quant à l'air, le rôle qu'il remplit par suite de sa force élastique peut être assimilé au rôle que joue le fluide inducteur élastique dans l'expérience électrique C'est donc l'élasticité du fluide inducteur contenu dans l'air qui sépare les conducteurs et déplacé par les charges de ces conducteurs qui est la cause de la combinaison de ces charges.

Ajoutons immédiatement que, bien que cette image hydrostatique nous fasse concevoir la manière dont se comporte le fluide inducteur dans la théorie de Maxwell, elle ne peut pas être poussée trop loin car le fluide inducteur est incompressible, propriété dont ne jouit pas l'air auquel nous l'avons comparé. Cette image n'est donc utile que pour faire comprendre l'effet de l'une des propriétés de ce fluide : son élasticité.

24. Tout courant est un courant fermé. — Le rôle prépondérant attribué par Maxwell aux diélectriques, qui dans la théorie ordinaire jouent un rôle passif, n'est pas la seule différence qui existe entre cette dernière théorie et celle de Maxwell. Une autre différence provient de la nature des courants.

Dans la théorie ordinaire on admet l'existence de deux sortes de courants : les courants fermés en général permanents, et les courants ouverts, en général instantanés, qui cessent quand par l'effet de la charge il se produit une différence de potentiel égale à la force électromotrice de la source électrique. Ces courants ouverts se produisent lorsque, par

exemple, on met les pôles d'une pile en communication avec deux conducteurs ou avec les deux armatures d'un condensateur.

Dansla nouvelle théorie il ne peut y avoir que des courants fermés. En effet, considérons le courant ouvert qui prend naissance quand nous mettons les pôles d'une pile en communication avec deux conducteurs isolés A et B. Le conducteur qui, en adoptant le langage de la théorie ordinaire, se charge positivement, doit prendre, d'après la théorie de Maxwell, une quantité de fluide électrique plus grande que celle qu'il possède à l'état neutre. Dans l'autre conducteur, au contraire, la quantité de fluide électrique doit diminuer. Mais le fluide électrique étant incompressible, sa densité demeure constante et on ne peut concevoir qu'il y ait condensation de ce fluide en un point et raréfaction en un autre. Pour concilier cette conséquence de l'incompressibilité du fluide électrique avec le fait expérimental de l'existence du courant, Maxwell fait intervenir le fluide inducteur qui remplit le diélectrique isolant les deux conducteurs : le fluide électrique sort de l'un des conducteurs, déplace le fluide inducteur du diélectrique et fait rentrer dans l'autre conducteur une quantité de fluide inducteur égale à la quantité de fluide électrique sortie du premier. Il y a donc fermeture du courant à travers le diélectrique et comme les molécules du fluide inducteur se déplacent suivant les lignes de force, ainsi qu'il résulte immédiatement des équations (1) qui définissent les composantes du déplacement, nous pouvons dire que les courants ouverts de la théorie ordinaire se ferment, dans la théorie de Maxwell, suivant les lignes de force du diélectrique.

Les courants instantanés qui prennent naissance dans la

charge ou la décharge d'un condensateur peuvent être également considérés comme se fermant à travers le diélectrique qui sépare les armatures. Dans la théorie de Maxwell nous n'avons donc que des courants fermés.

25. Ces déplacements du fluide électrique et du fluide inducteur dans le cas d'un courant instantané peuvent être matérialisés par une image hydrostatique. Il suffit de remplacer l'air et l'eau que nous avons pris précédemment par de l'eau et du mercure. Dans ces conditions si après avoir fermé le robinet C′ (*fig.* 3) et ouvert le robinet D′, nous faisons jouer la pompe, nous ne pouvons faire passer le mercure d'un vase dans l'autre, ces vases étant remplis par deux fluides incompressibles. Le passage du mercure ne peut avoir lieu que si nous supposons les parties supérieures des deux vases reliées par un canal permettant à l'eau de passer en sens contraire. Le mercure est alors l'image du fluide électrique, l'eau celle du fluide inducteur et le canal de communication peut être assimilé à un tube de force du diélectrique.

26. Courants de conduction et courants de déplacement. — Les courants fermés qui ont lieu à travers un circuit conducteur sont appelés *courants de conduction;* les courants résultant du déplacement du fluide inducteur, sont nommés *courants de déplacement.* Lorsque dans un même circuit fermé nous aurons à la fois des courants de conduction et des courants de déplacement, ce circuit ne sera autre qu'un circuit ouvert de la théorie ordinaire. Mais outre ces circuits et ceux qui ne comprennent que des courants de conduction, les seuls que l'on considère dans la théorie ordinaire,

nous rencontrerons dans la théorie de Maxwell des circuits fermés comprenant uniquement des courants de déplacement ; ces derniers circuits joueront un rôle considérable dans l'explication des phénomènes lumineux.

Les courants de conduction étant ceux qui se produisent dans les circuits bons conducteurs, ils doivent nécessairement obéir, pour être d'accord avec l'expérience, aux lois de Ohm, de Joule, à celle d'Ampère sur les actions mutuelles de deux éléments de courants et aux lois de l'induction. Quant aux courants de déplacement nous ne savons rien sur les lois auxquelles ils obéissent ; le champ est donc ouvert aux hypothèses. Maxwell admet qu'ils obéissent à la loi d'Ampère et aux lois de l'induction mais que les lois de Ohm et de Joule ne leur sont pas applicables, ces courants ne rencontrant à leur établissement d'autre résistance que celle qui résulte de l'élasticité du fluide inducteur, résistance de nature tout à fait différente de celle de la résistance des conducteurs.

27. Énergie potentielle d'un système électrisé. — Considérons un système de conducteurs chargés d'électricité positive et d'électricité négative. Ces charges représentent une certaine énergie potentielle. Dans la théorie ordinaire cette énergie potentielle est due aux travaux des attractions et des répulsions qui s'exercent entre les différentes masses électriques du système ; dans la théorie de Maxwell, elle est due à l'élasticité du fluide inducteur qui est dérangé de sa position d'équilibre normal. Cette énergie, qui est susceptible d'être mesurée, doit avoir dans les deux théories la même valeur, et par conséquent les expressions qui permettent d'en calculer la valeur doivent être identiques. C'est

en faisant cette identification que nous trouverons de nouvelles propriétés du fluide inducteur.

28. Cherchons d'abord l'expression de l'énergie potentielle considérée comme résultant des travaux des forces attractives et des forces répulsives.

Soient $d\tau$ un élément quelconque de volume de l'espace x, y et z ses coordonnées et ρ la densité de l'électricité libre dans cet élément ; la quantité d'électricité contenue dans cet élément sera $\rho d\tau$ et les composantes de la force électrique qui s'exerce sur cette quantité d'électricité libre seront :

$$-\rho d\tau \frac{d\psi}{dx}, \qquad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dy}, \qquad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dz}.$$

Supposons que la masse électrique contenue dans l'élément $d\tau$ se déplace de façon que ses trois coordonnées subissent des accroissements $\delta x, \delta y, \delta z$.

Le travail de la force électrique appliquée à cette masse électrique sera donc

$$-\rho d\tau\left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y + \frac{d\psi}{dz}\delta z\right).$$

Le travail total des forces appliquées aux différentes masses électriques répandues dans tout l'espace sera représenté par l'intégrale

$$-\int \rho d\tau\left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y + \frac{d\psi}{dz}\delta z\right)$$

étendue à l'espace tout entier.

Si donc nous appelons W l'énergie potentielle cherchée,

l'accroissement de cette énergie sera donnée par la formule :

$$(4) \qquad \delta W = \int \rho d\tau \left(\frac{d\psi}{dx}\,\delta x + \frac{d\psi}{dy}\,\delta y + \frac{d\psi}{dz}\,\delta z\right).$$

29. Évaluons maintenant l'accroissement $\delta\rho$ de la densité électrique ρ à l'intérieur de l'élément $d\tau$.

Considérons cet élément comme un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes de longueur α, β, γ soient respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées de sorte que $d\tau = \alpha\beta\gamma$.

La quantité d'électricité qui entrera dans ce parallèlipipède en passant à travers l'une des faces perpendiculaire à l'axe des x sera égale à ρ, densité du fluide, multiplié par δx, déplacement du fluide projeté sur l'axe des x, et par $\beta\gamma$ aire de la face du parallélipipède.

Nous aurons donc pour l'expression de cette quantité d'électricité :

$$\rho\delta x\beta\gamma.$$

La quantité d'électricité qui entrera dans le parallélipipède en passant par la face opposée aura une expression analogue. Seulement $\rho\delta x$ n'aura plus la même valeur, en effet ρ et δx sont des fonctions de x, y et z ; or quand on passe d'une face à la face opposée, x a augmenté d'une quantité très petite α e $\rho\delta x$ est devenu :

$$\rho\delta x + \frac{d\,(\rho\delta x)}{dx}\,\alpha.$$

La quantité d'électricité qui passe à travers cette seconde

face aura donc pour expression

$$-\left[\rho\delta x + \frac{d(\rho\delta x)}{dx}\alpha\right]\beta\gamma.$$

Nous prenons le signe — parce que la normale intérieure à cette seconde face est dirigée vers les x négatifs.

Ainsi la somme algébrique des masses électriques qui entreront dans le parallèlipipède en passant à travers les deux faces perpendiculaires à l'axe des x sera

$$-\frac{d(\rho\delta x)}{dx}\alpha\beta\gamma = -\frac{d(\rho\delta x)}{dx}d\tau.$$

De même les masses électriques qui entreront en traversant d'une part les deux faces perpendiculaires à l'axe des y, d'autre part les deux faces perpendiculaires à l'axe des z seront respectivement :

$$-\frac{d(\rho\delta y)}{dy}d\tau \qquad \text{et} \qquad -\frac{d(\rho\delta z)}{dz}d\tau.$$

Or $d\tau\delta\rho$ n'est autre chose que la somme des masses électriques qui entrent dans le parallèlipipède en passant à travers ses six faces, on a donc :

$$(5) \qquad \delta\rho = -\frac{d(\rho\delta x)}{dx} - \frac{d(\rho\delta y)}{dy} - \frac{d(\rho\delta z)}{dz}.$$

Cette équation n'est autre que celle qui est connue en hydrodynamique sous le nom d'équation de continuité.

30. Rappelons que d'après un lemme dont nous avons déjà

fait usage, on a

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau,$$

F étant une fonction de x,y,z et les intégrales étant étendues, la première à tous les éléments $d\omega$ d'une surface fermée, la seconde à tous les éléments du volume limité par cette surface. Si la fonction F devient nulle à la surface et si on prend pour surface fermée une sphère de rayon infiniment grand, la première intégrale est nulle, chacun de ses éléments étant nul puisque F s'annule à l'infini. On a donc pour une telle fonction

$$\int \frac{dF}{dx} d\tau = 0.$$

Dans le cas où F est un produit de deux fonctions u et v, l'égalité précédente devient

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau + \int v \frac{du}{dx} d\tau = 0,$$

et nous en tirons

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = -\int v \frac{du}{dx} d\tau,$$

nouvelle égalité qui va nous servir à transformer dW.

31. Il vient en appliquant cette règle :

$$\int \rho \delta x \frac{d\psi}{dx} d\tau = -\int \psi \frac{d}{dx} (\rho \delta x)\, d\tau,$$

$$\int \rho \delta y \frac{d\psi}{dy} d\tau = -\int \psi \frac{d}{dy} (\rho \delta y)\, d\tau,$$

$$\int \rho \delta z \frac{d\psi}{dz} d\tau = -\int \psi \frac{d}{dz} (\rho \delta z)\, d\tau,$$

Die Addition liefert mit Rücksicht auf (5.) folgende Formel: $\int \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \cdots\right) d\tau = + \int \psi\, \delta\rho\, d\tau$,

ou en additionnant et tenant compte ~~des~~ équations (4) et (5) :

d. i. nach (4.):

$$\delta W = \int \psi \delta \rho d\tau,$$

ou en vertu de l'équation de Poisson généralisée : 13.

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int \psi \delta \left[\frac{d}{dx}\left(K \frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K \frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K \frac{d\psi}{dz}\right) \right] d\tau.$$

En appliquant le même lemme que tout à l'heure, il vient :

$$\int \psi \delta \left[\frac{d}{dx}\left(K \frac{d\psi}{dx}\right) \right] d\tau = \int \psi d\tau \frac{d}{dx} \left[\delta \left(K \frac{d\psi}{dx}\right) \right] =$$

$$-\int d\tau \frac{d\psi}{dx}\, \delta \left(K \frac{d\psi}{dx}\right)$$

ou encore, en remarquant que le pouvoir inducteur K, n'est pas altéré par les déplacements des masses électriques et par

conséquent que $\delta K = 0$:

$$\int \psi\, \delta \left[\frac{d}{dx}\left(K \frac{d\psi}{dx}\right)\right] d\tau = -\int K d\tau \frac{d\psi}{dx}\, \delta \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\int \frac{K d\tau}{2}\, \delta \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\right].$$

On obtiendrait par symétrie deux autres équations analogues, et en les additionnant et divisant par -4π, on trouverait :

$$\delta W = \delta \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 d\tau.$$

L'énergie potentielle du système a donc pour valeur

$$(6) \qquad W = \int \frac{K}{8\pi} \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 d\tau$$

Vgl. Th. 4 E. p. 8. Dort K = 1 gedacht

la constante d'intégration étant nulle, puisque l'énergie potentielle doit être nulle quand tout l'espace est à l'état neutre, et que dans ce cas le potentiel en chaque point a la même valeur, zéro.

32. L'intégrale du second membre de l'expression (6) doit être étendue à tout l'espace, mais il revient au même de ne l'étendre qu'à l'espace occupé par le diélectrique, car les éléments de l'intégrale qui correspondent à des points situés à l'intérieur des conducteurs sont nuls. En effet en tout point d'un conducteur le potentiel a même valeur et par suite, ses dérivées partielles $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dz}$, sont également nulles.

Cette remarque permet de transformer l'expression (6), en tout point d'un diélectrique, nous avons d'après les hypothèses de Maxwell,

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}, \qquad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dy}, \qquad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dz},$$

et en portant les valeurs des dérivées partielles du potentiel ψ, déduites de ces relations dans le second membre de (3), il vient

$$(7) \qquad W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau.$$

Telle est l'énergie potentielle d'un système électrisé exprimée à l'aide des notations de Maxwell.

33. Cherchons maintenant l'expression de cette énergie considérée comme résultant de la déformation du fluide inducteur.

Soient $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ les trois composantes de la force qui agit sur un élément $d\tau$ du fluide inducteur lorsque ce fluide se trouve en équilibre contraint par suite de la charge des conducteurs placés dans le diélectrique. Si les molécules électriques qui composent le système subissent un déplacement infiniment petit, les composantes $f, g, h,$ du déplacement de l'élément $d\tau$ du fluide inducteur prennent des accroissements δf, δg, δh. Le travail élémentaire de la force qui s'exerce sur cet élément a pour valeur

$$(X\delta f + Y\delta g + Z\delta h)\, d\tau,$$

et le travail total sur tous les éléments du fluide inducteur est

$$\int (X\delta f + Y\delta g + Z\delta h)\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace occupé par le diélectrique. La variation de l'énergie potentielle du système, qui ne diffère que par le signe de la variation du travail, est donc

$$\delta W = -\int (X\delta f + Y\delta g + Z\delta h)\, d\tau.$$

34. Élasticité du fluide inducteur. — L'identification de cette expression avec la suivante

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K}(f\delta f + g\delta g + h\delta h)\, d\tau.$$

déduite de l'égalité (7) nous donne pour les valeurs des composantes X, Y, Z,

$$X = -\frac{4\pi}{K} f, \qquad Y = -\frac{4\pi}{K} g, \qquad Z = -\frac{4\pi}{K} h,$$

Ces relations nous montrent que les composantes de la force qui s'exerce sur un élément $d\tau$ du fluide inducteur sont proportionnelles aux composantes du déplacement électrique. La force élastique du fluide inducteur est donc dirigée suivant le déplacement et le rapport de sa grandeur à celle du déplacement est égal à $\frac{4\pi}{K}$. Nous verrons plus tard que dans le cas où le diélectrique est un milieu cristallisé la force élastique n'est plus dirigée suivant le déplacement; les conclusions précé-

dentes ne s'appliquent qu'aux milieux diélectriques isotropes.

35. Il est à peine besoin de faire remarquer combien l'élasticité du fluide inducteur est différente de l'élasticité des gaz ou de l'éther lumineux. Dans les gaz et dans l'éther l'énergie potentielle dépend seulement des positions relatives des molécules et non de leur position absolue dans l'espace; par suite il n'y a pas réaction élastique quand un de ces fluides se déplace sans se déformer. Il en est tout autrement pour le fluide inducteur. Tout se passe comme si chacune des molécules de ce fluide était attirée proportionnellement à la distance par sa position d'équilibre normal. Il résulterait de là que si l'on donnait à toutes ces molécules un même mouvement de translation sans que leur situation relative variât, l'élasticité n'en devrait pas moins entrer en jeu. Cette élasticité toute particulière que doit posséder le fluide inducteur paraît difficile à admettre. On ne conçoit pas comment le point mathématique où se trouve une molécule de fluide inducteur en équilibre normal, pourra agir sur cette molécule pour la ramener à sa position d'équilibre quand une cause électrique l'en aura déplacée. On concevrait plus facilement que ce sont les molécules matérielles du diélectrique qui agissent sur les molécules du fluide inducteur pénétrant le milieu pondérable. Mais cette hypothèse ne lèverait pas toutes les difficultés, car elle n'expliquerait pas l'élasticité du fluide inducteur répandu dans le vide. En outre l'action de la matière sur le fluide inducteur entraînerait l'existence d'une réaction de ce fluide sur la matière; or, on n'a constaté aucune manifestation de cette réaction.

36. On pourrait encore supposer l'existence de deux fluides inducteurs se pénétrant et dont les molécules de l'un agiraient

sur les molécules de l'autre dès quelles seraient dérangées de leurs positions d'équilibre normal. Mais si cette hypothèse a l'avantage de ramener l'élasticité spéciale au fluide inducteur à l'élasticité telle qu'on la conçoit ordinairement, elle a l'inconvénient d'être plus compliquée que celle de l'existence d'un seul fluide. Aussi croyons-nous que l'hypothèse du fluide inducteur de Maxwell n'est que transitoire et qu'elle sera remplacée par une autre plus logique dès que les progrès de la science le permettront. On peut nous objecter que Maxwell n'a pas introduit cette hypothèse du fluide inducteur; mais, comme nous l'avons dit au commencement de ce chapitre, si le mot n'est pas dans l'ouvrage de ce physicien, la chose s'y trouve ; seulement ce que nous avons appelé fluide inducteur est désigné par le mot électricité ; dans le langage de Maxwel l'électricité des diélectriques est supposée élastique, tandis que l'électricité des conducteurs est supposée inerte. Ces propriétés différentes attribuées à deux fluides désignés par le même nom sont la cause du manque de clarté que présentent certains passages de l'ouvrage de Maxwell. C'est uniquement pour éviter cette obscurité que nous avons introduit le mot de fluide inducteur dans l'exposé des idées de Maxwell.



37. Distribution électrique. — Pour achever de justifier les hypothèses de Maxwell, il nous faut maintenant montrer que les lois expérimentales de la distribution électrique en sont une conséquence nécessaire.

Commençons par rappeler ces lois. On sait que cette distribution ne dépend que d'une certaine fonction ψ, le potentiel, assujettie à diverses conditions. Dans toute l'étendue du diélectrique cette fonction ψ est continue ainsi que ses déri-

vées et satisfait à la relation

$$\frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} = 0 ;$$

en tout point d'un conducteur elle a une valeur constante, mais en un point de la surface ses dérivées ne sont pas continues. Enfin cette fonction s'annulle pour les points situés à l'infini.

L'étude de la distribution électrique sur un conducteur conduit à introduire une nouvelle quantité, la densité électrique superficielle. Si nous désignons par q la quantité d'électricité répandue sur un élément de surface $d\omega$, la relation de Poisson, étendue au cas où le diélectrique est autre que l'air, donne

$$K \frac{d\psi}{dn} d\omega = - 4\pi q.$$

La densité superficielle $\frac{q}{d\omega}$ a donc pour expression

$$\sigma = - \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dn}.$$

Mais on peut supposer que la couche de fluide électrique répandue à la surface a une densité constante et que son épaisseur est proportionnelle à σ ; c'est à cette dernière interprétation qne nous nous attacherons.



38. Revenons à la théorie de Maxwell. Dans cette théorie nous avons deux fluides incompressibles, le fluide inducteur et le fluide électrique auxquels nous admettrons que l'on puisse appliquer les lois de l'hydrostatique. On sait que si p

est la pression en un point x, y, z, d'un tel fluide, les composantes X, Y, Z, de la force élastique résultant du déplacement de ce point, ont pour valeurs

$$X = \frac{dp}{dx}, \qquad Y = \frac{dp}{dy}, \qquad Z = \frac{dp}{dz}.$$

Si nous désignons par ψ la pression en un point du fluide inducteur, nous avons

$$X = \frac{d\psi}{dx}, \qquad Y = \frac{d\psi}{dy}, \qquad Z = \frac{d\psi}{dz}.$$

Mais nous avons vu dans le paragraphe 34 que les composantes de la force élastique sont égales aux produits des composantes du déplacement par $-\frac{4\pi}{K}$. Nous avons donc

$$(8) \qquad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{4\pi}{K} f, \qquad \frac{d\psi}{dy} = -\frac{4\pi}{K} g, \qquad \frac{d\psi}{dz} = -\frac{4\pi}{K} h.$$

De ces relations on déduit

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}, \qquad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}, \qquad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}.$$

Ces nouvelles relations sont précisément celles qui définissent les composantes du déplacement, ψ désignant alors le potentiel. Pour justifier la manière dont nous avons défini, d'après Maxwell, les composantes du déplacement électrique, il nous faut montrer que la pression ψ en un point du fluide inducteur n'est autre chose que le potentiel.

39. Le fluide inducteur étant incompressible, nous avons la

relation

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0,$$

qui devient, en tenant compte des relations (8),

$$\frac{d}{dx}\,K\,\frac{d\psi}{dx}+\frac{d}{dy}\,K\,\frac{d\psi}{dy}+\frac{d}{dz}\,K\,\frac{d\psi}{dz}=0\,;$$

la fonction ψ satisfait donc à l'une des conditions imposées au potentiel. Elle est aussi, comme le potentiel, constante à l'intérieur d'un conducteur, car l'électricité qui remplit les conducteurs n'est pas élastique, par conséquent X, Y, Z sont nuls et il doit en être de même des dérivées de ψ.

Quand on passe d'un point du diélectrique à un point intérieur d'un conducteur les dérivées de la fonction ψ, ne sont pas continues puisqu'elles passent d'une valeur finie à zéro. Mais la fonction elle-même reste continue. En effet, si la pression n'était pas la même des deux côtés de la surface qui limite le conducteur l'équilibre n'existerait pas, puisque le fluide électrique étant inerte, toute différence de pression aurait pour effet de faire mouvoir ce fluide.

La fonction ψ jouit donc de toutes les propriétés du potentiel ; par suite la pression du fluide inducteur en un point est précisément le potentiel en ce point.

40. Montrons enfin que la théorie de Maxwell conduit à la même expression que la théorie ordinaire pour l'épaisseur de la couche électrique située à la surface d'un conducteur.

Soient S (*fig.* 4) la surface qui sépare l'électricité du fluide inducteur dans l'état d'équilibre normal, et S′ la surface de séparation dans l'état d'équilibre contraint. L'électricité libre

étant l'excès de la quantité de fluide électrique contenue dans le conducteur dans l'état d'équilibre contraint sur la quantité qui s'y trouve normalement, la charge du conducteur est la quantité de fluide comprise entre les deux surfaces S et S'. Ce fluide étant incompressible la charge en chaque point est donc proportionnelle à la distance normale qui sépare les deux surfaces. Considérons une molécule du fluide inducteur située, dans l'état d'équilibre normal, en un point m de la surface S ; dans l'état d'équilibre contraint cette molécule viendra en m' sur la surface S'. Le triangle mnm', dont le côté mn est la distance normale qui sépare les deux surfaces, peut être considéré comme un triangle rectangle en n. L'épaisseur de la couche électrique est donc égale à la projection du déplacement sur la normale à la surface (en réalité le déplacement est normal à la surface, mais nous n'avons pas besoin de faire intervenir ici cette propriété du fluide inducteur). Cette projection a pour valeur

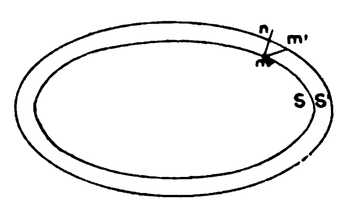


Fig. 4.

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = -\frac{K}{4\pi}\left(\alpha\frac{d\psi}{dx} + \beta\frac{d\psi}{dy} + \gamma\frac{d\psi}{dz}\right) = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dn}$$

C'est bien la valeur que donne la théorie ordinaire pour l'épaisseur de la couche électrique.

41. Dans ce qui précède, nous avons été amenés à supposer que la pression dans le fluide inducteur est égale à ψ. Nous nous trouvons donc en contradiction avec une autre théorie

de Maxwell, où l'on trouve que la pression en un point du diéletrique, au lieu d'être égale au potentiel, est proportionnelle à $\sum \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2$. Nous reviendrons plus loin sur cette contradiction.

42. La méthode précédente n'est pas la seule que l'on puisse employer pour déduire de la théorie de Maxwell les lois de la distribution électrique. Elle a d'ailleurs l'inconvénient de ne plus subsister si le fluide inducteur n'existe pas ou si dans ce fluide il n'y pas de pression. Ayant fait remarquer que l'hypothèse du fluide inducteur ne devait être considérée que comme une hypothèse transitoire, il n'est pas inutile d'indiquer une autre méthode donnant les lois de la distribution électrique sans supposer l'existence de ce fluide. Exposons cette méthode.

Pour qu'un système soit en équilibre, il faut et il suffit que son énergie potentielle soit minimum. Nous obtiendrons donc les conditions de l'équilibre électrique, en exprimant que l'énergie potentielle W est minimum, ou, ce qui revient au même, que la variation de W est nulle quand on donne à f, g, h, des accroissements quelconques compatibles avec les liaisons. Or, quelle que soit la théorie adoptée f, g, h, doivent satisfaire à la relation

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0,$$

qui exprime l'incompressibilité du milieu.

D'autre part, considérons un quelconque des conducteurs du système. La charge M de ce conducteur sera une des données

de la question. On devra donc avoir

$$\int (\alpha f + \beta g + \gamma h)\, d\omega = \mathrm{M}$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface du conducteur ; α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à cet élément et M une constante donnée.

Écrivons que la variation de l'énergie potentielle est nulle ; nous avons

$$\delta \mathrm{W} = \int \frac{4\pi}{\mathrm{K}} (f\delta f + g\delta g + h\delta h)\, d\tau = 0.$$

Mais à cause des liaisons nous avons aussi

$$\frac{d}{dx}\delta f + \frac{d}{dy}\delta g + \frac{d}{dz}\delta h = 0,$$

$$\int (\alpha\delta f + \beta\delta g + \gamma\delta h)\, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du diélectrique.

Le calcul des variations nous apprend qu'il existe une fonction ψ telle que l'on ait identiquement

$$\int \left[\frac{4\pi}{\mathrm{K}} \sum f\delta f - \psi \sum \frac{d}{dx}\delta f\right] d\tau = 0.$$

En intégrant par parties l'intégrale correspondant au second terme de la parenthèse, nous obtenons

$$\int \left[\frac{4\pi}{\mathrm{K}} \sum f\delta f + \sum \frac{d\psi}{dx}\delta f\right] d\tau - \int (\alpha\psi\delta f + \beta\psi\delta g + \gamma\psi\delta h)\, d\omega = 0,$$

Cette équation devant être satisfaite identiquement, tous les éléments de la première intégrale doivent être nuls; on a

$$\frac{4\pi}{K} f + \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

ce qui est précisément la relation donnée par Maxvell.

Il reste

$$\int \psi \, (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) \, d\omega = 0.$$

L'intégrale étant étendue à tous les éléments de surface de *tous* les conducteurs.

Cette équation devra être satisfaite pour toutes les valeurs de δf, δg, δh satisfaisant aux équations de liaison, c'est-à-dire telles que l'on ait pour *chacun* des conducteurs

$$\int (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) \, d\omega = 0.$$

Les règles du calcul des variations nous apprennent que cela ne peut avoir lieu que si ψ est constant à la surface de chacun des conducteurs.

Ainsi le potentiel ψ a une valeur constante en tous les points de la surface de chacun des conducteurs, cette valeur pouvant varier d'ailleurs d'un conducteur à l'autre.

CHAPITRE III

THÉORIE DES DIÉLECTRIQUES DE POISSON COMMENT ELLE PEUT SE RATTACHER A CELLE DE MAXWELL

43. Hypothèses de Poisson sur la constitution des diélectriques. — Dans la théorie de Poisson le rôle des diélectriques est bien moins important que dans celle de Maxwell. Pour Poisson le diélectrique n'a d'autre but que d'empêcher le mouvement de l'électricité. Mais pour expliquer l'augmentation de capacité d'un condensateur quand on y remplace la lame d'air par une autre substance non conductrice, une hypothèse est nécessaire. Une difficulté analogue rencontrée dans la théorie du magnétisme avait été résolue de la manière suivante par Poisson.

Il s'agissait d'expliquer le magnétisme induit. Poisson regarde un morceau de fer doux aimanté par influence comme un assemblage d'éléments magnétiques séparés les uns des autres par des intervalles *inaccessibles au magnétisme* et de dimensions très petites. Dans chacun de ces éléments, aux-

quels Poisson attribue pour plus de simplicité la forme sphérique, les deux fluides magnétiques peuvent se séparer et circuler librement.

Mossotti n'a eu qu'à transporter cette théorie en électrostatique pour expliquer les phénomènes observés dans les diélectriques. Dans cette hypothèse, l'air est le seul diélectrique homogène ; quant aux autres diélectriques, il se les représente comme constitués par de petites sphères conductrices disséminées dans une substance non conductrice jouissant des mêmes propriétés que l'air. Les phénomènes attribués au pouvoir inducteur spécifique s'expliquent alors par les effets répulsifs et attractifs de l'électricité induite par influence dans les sphères conductrices.

44. Dans cette théorie comme dans celle de Maxwell il existe des courants de déplacement. En effet supposons un diélectrique autre que l'air en présence de conducteurs électrisés; l'électricité neutre des sphères conductrices du diélectrique est décomposée : un hémisphère se trouve chargé positivement, l'autre négativement. Si alors on met les conducteurs en communication avec le sol l'influence sur les sphères du diélectrique cesse et ces sphères reviennent à l'état neutre ; l'électricité se déplace donc d'un hémisphère à l'autre, par suite, il y a des courants de déplacement.

Il est probable que c'est la conception de Poisson et Mossotti sur la nature des diélectriques qui a conduit Maxwell à sa théorie. Il dit l'avoir déduite des travaux de Faraday et n'avoir fait que traduire sous une forme mathématique les vues de ce célèbre physicien ; or, Faraday avait adopté les idées de Mossotti. (Cf. Experimental Researches, Faraday, série XIV,

Wichtig!

§ 1679). Ajoutons que, ainsi que nous le verrons bientôt, l'intensité des courants de déplacement n'a pas la même valeur dans la théorie de Poisson et dans celle de Maxwell. Nous montrerons cependant comment on peut faire concorder les deux théories.

45. On a fait malheureusement à la théorie du magnétisme de Poisson de graves objections et il est certain que les calculs du savant géomètre ne sont nullement rigoureux. Ces objections s'appliquent naturellement à la théorie de Mossotti qui n'en diffère pas au point de vue mathématique.

C'est ce qui me décide à ne pas reproduire ici ces calculs, je me bornerai à renvoyer le lecteur qui désirerait en faire une étude approfondie aux sources suivantes. Le mémoire original de Poisson, sur la théorie du magnétisme a paru dans le tome V des Mémoires de l'Académie des Sciences (1821-1822). Une théorie plus élémentaire, mais passible des mêmes objections, est exposée dans le tome 1er des Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme de MM. Mascart et Joubert (pages 162 à 177). C'est celle que j'avais développée dans mes leçons.

Je renverrai également à l'article 314 de la seconde édition de Maxwell où le savant anglais présente d'une façon très originale une théorie identique au point de vue mathématique à celle de Poisson et de Mossotti, mais s'appliquant à un problème physique très différent, celui d'un courant électrique à travers un conducteur hétérogène.

Mais je recommanderai surtout la lecture du mémoire de M. Duhem sur l'aimantation par influence (Paris, Gauthier, Villars 1888; et Annales de la Faculté des Sciences de Tou-

louse), où les calculs de Poisson et les objections qu'on y peut faire sont exposés avec la plus grande clarté.

Je vais maintenant développer la théorie en cherchant à me mettre à l'abri de ces objections ; pour cela, j'ai besoin de connaître la distribution de l'électricité induite par une sphère placée dans un champ uniforme.

46. Sphère placée dans un champ uniforme. — Prenons une sphère conductrice placée dans un champ électrique uniforme et désignons par ψ la valeur du potentiel dû aux masses électriques extérieures en un point de ce champ. La force électrique s'exerçant sur l'unité de masse électrique située en un point quelconque a pour composantes

$$-\frac{d\psi}{dx}, \qquad -\frac{d\psi}{dy}, \qquad -\frac{d\psi}{dz}.$$

Si on prend l'axe des x parallèle aux lignes de forces du champ, cette force électrostatique, que nous désignerons par φ, a pour valeur

$$\varphi = -\frac{d\psi}{dx}.$$

La sphère conductrice placée dans le champ s'électrise par influence, et l'équilibre électrique est atteint quand la force électrostatique due à la distribution sur la surface de cette sphère est égale et directement opposée à φ en tout point intérieur. Cherchons l'expression de cette force.

47. Lorsque la sphère conductrice est à l'état neutre, nous pouvons la considérer comme formée de deux sphères égales, ayant même centre, chargées, l'une d'électricité positive,

l'autre d'une quantité égale d'électricité négative ; chacune de ces deux charges, au lieu d'être seulement superficielle, étant uniformément répandue dans tout le volume de la sphère ; la résultante des actions exercées par ces sphères sur un point extérieur est évidemment nulle, comme cela doit être. Si nous

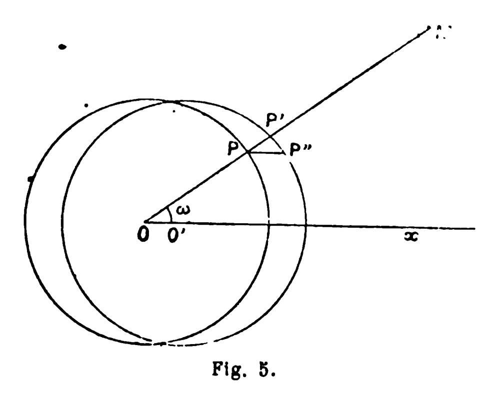


Fig. 5.

déplaçons la sphère négative de manière que son centre vienne en O' (*fig.* 5), le centre de la sphère positive restant en O, les actions de ces sphères ne se neutralisent plus. Nous pouvons donc regarder la sphère conductrice soumise à l'influence comme formée de deux sphères égales, électrisées en sens contraire et dont les centres ne coïncident plus.

48. On sait que l'action d'une sphère homogène sur un point intérieur situé à une distance r de son centre est la même que si la masse électrique contenue dans la sphère de rayon r était concentrée au centre de la sphère. En appelant ρ la densité électrique en chaque point de la sphère on a pour la force électrostatique s'exerçant sur le point considéré

$$F = \frac{1}{r^2}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r \rho.$$

Si donc on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère, x, y, z les coordonnées du point considéré, les composantes de l'action exercée par la sphère sur l'unité de masse électrique placée en un point intérieur ont pour valeurs

$$\frac{4}{3}\pi(x - x_0)\rho, \qquad \frac{4}{3}\pi(y - y_0)\rho, \qquad \frac{4}{3}\pi(z - z_0)\rho.$$

49. Appliquons ces formules aux deux sphères qui remplacent la sphère conductrice électrisée par influence. Prenons pour origine des axes de coordonnées le centre O de la sphère positive et pour axe des x la droite qui joint les centres O et O′ des deux sphères. Nous aurons pour la composante suivant Ox de la résultante des actions qu'exercent les deux sphères sur l'unité de masse électrique située en un point intérieur x, y, z,

$$\frac{4}{3}\pi x\rho - \frac{4}{3}\pi(x - x_0)\rho = \frac{4}{3}\pi x_0\rho,$$

x_0 désignant l'abcisse de O′. Quant aux composantes suivant les axes des y et des z, on voit facilement qu'elles sont nulles. Il faut donc, pour qu'une molécule électrique intérieure à la sphère soit en équilibre sous l'action du champ uniforme φ et de l'électricité développée sur la sphère par influence, que la ligne des centres des sphères positive et négative soit parallèle au champ et que la distance de ces centres satisfasse à l'égalité

$$\varphi = -\frac{4}{3}\pi x_0\rho.$$

D'ailleurs, comme les densités des sphères ne sont assujetties qu'à la condition d'être égales en valeurs absolues nous pou-

vons supposer que ces densités sont $+1$ et -1. Il vient alors,

$$(1) \qquad \varphi = -\frac{4}{3}\pi x_0,$$

égalité qui nous donne la distance des centres des deux sphères.

50. Nous pouvons trouver facilement la valeur du potentiel résultant de la sphère influencée en un point M extérieur à cette sphère. L'action d'une sphère homogène sur un point extérieur étant la même que si toute la masse électrique était concentrée au centre de cette sphère, le potentiel en M a pour expression

$$\frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{r'-r}{rr'},$$

R désignant le rayon de chacune des sphères, r et r' la distance du point M aux centres O et O′. Nous appellerons ω l'angle de la direction OM avec l'axe des x et nous négligerons les quantités infiniment petites du 2e ordre, en regardant x_0 comme du 1er ordre. Alors l'expression précédente peut s'écrire

$$-\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{x_0 \cos\omega}{r^2}$$

ou en tenant compte de la relation (1)

$$(2) \qquad \varphi R^3 \frac{\cos\omega}{r^2}.$$

La distribution électrique sur la sphère induite s'obtient tout aussi simplement. L'épaisseur de la couche négative en

un point P quelconque est

$$PP' = PP'' \cos \omega = x_0 \cos \omega = -\frac{3\varphi \cos \omega}{4\pi};$$

par suite, l'épaisseur de la couche électrique superficielle est donnée, en valeur et en signe par l'expression $\frac{3\varphi \cos \omega}{4\pi}$.

On dit qu'une sphère conductrice, sur laquelle la distribution électrique est la même que si elle était placée dans un champ uniforme, est *polarisée*.

52. Polarisation des diélectriques. — Considérons maintenant un diélectrique, constitué comme se l'imagine Mossotti et soumis à l'action de corps électrisés extérieurs. Chacune des sphères qu'il contient va se polariser. En effet les dimensions de ces sphères étant très petites, dans le voisinage de chacune d'elles, le champ électrique peut être regardé comme uniforme.

Il est vrai que la distribution électrique à la surface d'une de ces sphères pourra être troublée par l'influence des sphères voisines; mais nous n'aurons pas à tenir compte de ces perturbations :

1° Parce que les sphères étant irrégulièrement distribuées, leur influence tend à se neutraliser mutuellement;

2° Parce que si l'on admet que la distribution à la surface d'une sphère n'est pas la même qu'elle serait dans un champ uniforme, ces irrégularités de la distribution sont exprimées par des fonctions sphériques d'ordre supérieur; si donc on considère le potentiel en un point situé à une distance r du centre de la sphère, les termes qui dépendent de ces irrégu-

larités contiendront une puissance supérieure de $\frac{1}{r}$ et seront négligeables, si r est très grand par rapport au rayon de la sphère.

Nous dirons alors qu'un diélectrique dont toutes les sphères sont polarisées est lui-même polarisé.

53. Nous avons maintenant à définir les composantes de la polarisation électrique qui correspondent à ce qu'on appelle dans la théorie du magnétisme, composantes de la magnétisation.

Nous avons vu plus haut que le potentiel de notre sphère par rapport à un point extérieur était égal à :

$$\varphi R^3 \frac{\cos \omega}{r^2}$$

ou à

$$-\frac{3}{4\pi} u\varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$$

en appelant u le volume de la sphère.

Si l'on avait pris des axes de coordonnées quelconques, nous aurions trouvé pour le potentiel de la sphère polarisée, en appelant x, y, z les cordonnées de son centre,

$$-\frac{3u}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right).$$

Imaginons maintenant un élément de volume $d\tau$ du diélectrique, contenant un nombre très grand n de sphères, et cependant assez petit pour que le champ puisse y être regardé

comme uniforme. Le potentiel des n sphères contenues dans cet élément sera :

$$-\frac{3nu}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)$$

Posons

$$nu = hd\tau,$$

de sorte que h soit le rapport du volume des sphères au volume total du diélectrique.

Posons en outre

$$A = -\frac{3h}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}, \qquad B = -\frac{3h}{4\pi}\frac{d\psi}{dy}, \qquad C = -\frac{3h}{4\pi}\frac{d\psi}{dz};$$

il viendra pour le potentiel dû à l'élément polarisé $d\tau$

$$d\tau\left(A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right).$$

Les trois quantités A, B et C sont les *composantes de la polarisation*, et le potentiel dû au diélectrique entier s'écrira

$$V=\int d\tau\left(A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right),$$

l'intégrale étant étendue au diélectrique entier; ou, en intégrant par parties,

$$(3)\quad V=\int\frac{d\omega}{r}(lA+mB+nC)-\int\frac{d\tau}{r}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right).$$

La première intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui limite le diélectrique, l, m, et n désignent les cosinus directeurs de la normale à cette surface ; la seconde intégrale est étendue au volume entier du diélectrique.

54. Soit maintenant V_1 le potentiel dû aux corps électrisés extérieurs. Soit s une quelconque des petites sphères conductrices ayant pour centre un certain point O et exprimons les conditions de l'équilibre électrique sur cette sphère.

Décomposons le volume du diélectrique en deux volumes partiels v' et v''; le second de ces volumes sera très petit et contiendra la sphère s.

Considérons une molécule électrique située en O, cette molécule devra être en équilibre sous l'action :

1° Des corps électrisés extérieurs;

2° Du volume v' du diélectrique;

3° Des sphères autres que s situées à l'intérieur de v'';

4° De la sphère s.

Nous supposerons que le volume v'', quoique contenant un très grand nombre de sphères, est assez petit pour que les composantes A, B, C, puissent y être regardées comme constantes et nous choisirons les axes de façon que B et C et par conséquent $\frac{d\psi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dz}$ soient nuls.

Écrivons que les composantes de toutes ces actions suivant l'axe des x se détruisent.

Pour éviter toute confusion nous appellerons pour un instant x, y, z les coordonnées du point attirant, ξ, η, ζ celles du point attiré de sorte que :

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Nous rappelons en outre que ψ désigne le potentiel du champ uniforme qui produirait sur chaque sphère conductrice leur polarisation actuelle, et que le potentiel actuel est égal à $V + V_1 = U$. Nous continuerons à désigner les composantes du champ uniforme par $-\frac{d\psi}{dx}, -\frac{d\psi}{dy}, -\frac{d\psi}{dz}$.

La composante due aux corps extérieurs sera $-\frac{dV_1}{d\xi}$.

La composante due à la sphère s sera $+\frac{d\psi}{dx}$ puisque, par hypothèse, la sphère est polarisée comme elle le serait sous l'action d'un champ uniforme d'intensité $-\frac{d\psi}{dx}$.

55. Je dis que si la surface σ qui sépare les deux volumes partiels v' et v'' est convenablement choisie, l'action des sphères autres que s et intérieures à v' sera nulle.

En effet soient a, b, c les coordonnées du centre d'une de ces sphères le point O étant pris pour l'origine. La force électrostatique exercée par cette sphère au point O aura pour composante suivant l'axe des x :

$$-\frac{3u}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} = \frac{3u}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\frac{a^2+b^2+c^2-3a^2}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Il résulte de là que les actions des trois sphères qui ont respectivement pour centres les points

$$(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)$$

se détruisent.

Si donc la surface σ possède la symétrie cubique et ne

change pas quand on permute les trois axes de coordonnées, les actions des différentes sphères contenues à l'intérieur de cette surface se neutraliseront. *C'est faute d'avoir fait cette hypothèse que Poisson n'a pas été rigoureux.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, que la surface σ est une sphère ayant son centre en O.

56. Il reste à évaluer l'action du volume v'.

Cette action est égale à

$$-\frac{dV'}{d\xi}$$

en appelant V' l'intégrale

$$V' = \int_{v'} d\tau \left(A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right)$$

étendue au volume v'; et on aura

$$V' = V - V''$$

V'' désignant la même intégrale étendue au volume v'', d'où

$$\frac{dV'}{d\xi} = \frac{dV}{d\xi} - \frac{dV''}{d\xi}.$$

Nous avons d'ailleurs, comme on l'a vu plus haut

$$V'' = \int \frac{d\omega}{r} (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

la première intégrale étant étendue à la surface σ et la seconde au volume v''.

On en déduit :

$$\frac{dV''}{d\xi} = \int \frac{d\omega}{r^3} x (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r^3} x \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right).$$

Si le rayon de la sphère σ est infiniment petit, il en sera de même de la seconde des intégrales du second membre de l'égalité précédente, mais non de la première.

D'ailleurs si ce rayon est très petit, A, B et C sont des constantes et nous avons supposé que B et C sont nuls. Il vient donc :

$$\frac{dV''}{d\xi} = A \int \frac{xl}{r^3} d\omega.$$

Or l est le cosinus directeur de la normale à la sphère ; c'est donc $\frac{x}{r}$ et l'on a :

$$\frac{dV''}{d\xi} = A \int \frac{x^2}{r^4} d\omega = \frac{4}{3} \pi A.$$

57. L'équation d'équilibre s'écrit donc :

$$-\frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d\psi}{dx} - \frac{dV}{d\xi} + \frac{4}{3} \pi A = 0,$$

ou

$$\frac{d(V + V_1)}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi} = \frac{4}{3} \pi \left(1 - \frac{1}{h}\right) A.$$

Si au lieu de prendre pour axe la direction de la polarisation au point considéré, nous avions pris des axes quelconques,

nous aurions trouvé, au lieu de l'équation unique que nous venons de démontrer, les équations suivantes :

$$(1-K)\frac{dU}{dx}=4\pi A,$$

$$(1-K)\frac{dU}{dy}=4\pi B,$$

$$(1-K)\frac{dU}{dz}=4\pi C;$$

en posant pour abréger :

$$K-1=\frac{3h}{1-h},$$

d'où

$$h=\frac{K-1}{K+2}.$$

Nous écrivons d'ailleurs $\frac{dU}{dx}$ au lieu de $\frac{dU}{d\xi}$ en revenant aux notations habituelles, ce qui n'a plus d'inconvénient puisqu'aucune confusion n'est plus à craindre.

58. On déduit de là en différentiant la première de ces équations par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutant :

$$-\frac{d}{dx}\left(K\frac{dU}{dx}\right)-\frac{d}{dy}\left(K\frac{dU}{dz}\right)-\frac{d}{dz}\left(K\frac{dU}{dz}\right)+\Delta U$$
$$=4\pi\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right).$$

Or V_1 est le potentiel des corps extérieurs, on a donc

D'autre part l'équation (3) montre que V peut être regardé comme le potentiel dû à une couche de densité

$$lA + mB + nC$$

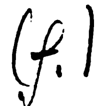
répandue à la surface du diélectrique, moins le potentiel d'une quantité d'électricité répandue dans tout ce volume et ayant pour densité

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}.$$

Il en résulte que :

$$\Delta U = \Delta V = 4\pi\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right),$$

et par conséquent



$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dU}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{dU}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{dU}{dv}\right) = 0.$$

Or, $U = V + V_1$ désignant le potentiel, la comparaison de l'équation à laquelle nous venons de parvenir avec les équations fondamentales de l'électrostatique montre que K n'est autre chose que le pouvoir inducteur.

59. Ainsi, dans un diélectrique constitué comme se l'imagine Mossotti, et de pouvoir inducteur K, le rapport du volume occupé par les sphères au volume total est égal à :

$$h = \frac{K - 1}{K + 2}.$$

On trouve d'ailleurs

$$(1 - K)\frac{dU}{dx} = 4\pi A = -3h\frac{d\psi}{dx}.$$

Le déplacement électrique de la théoric de Maxwell s'écrit alors :

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{dU}{dx} = -\frac{3h}{4\pi}\frac{K}{K-1}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{3}{4\pi}\frac{K}{K+2}\frac{d\psi}{dx}.$$

Les deux autres composantes du déplacement électrique sont nulles si, comme nous le supposons, nous prenons pour axe des x la direction de la polarisation au point considéré. Si en même temps, revenant à nos notations du n° **46**, nous appelons φ l'intensité du champ uniforme qui polariserait nos petites sphères comme elles le sont réellement, nous aurons :

$$\varphi = -\frac{d\psi}{dx}$$

et

$$f = \frac{3}{4\pi}\frac{K}{K+2}\varphi. \tag{4}$$

60. Nous avons vu que dans la théorie de Poisson et Mossotti la polarisation des petites sphères conductrices varie quand on fait varier le champ électrique dans lequel elles se trouvent placées, et que les courants qui se produisent dans ces petites sphères et résultant de cette variation peuvent être comparés aux courants de déplacement de Maxwell. Il importe de comparer l'intensité de ces courants de déplacement dans les deux théories.

Pour cela je vais calculer la valeur f' du déplacement électrique dans la théorie de Mossotti et la comparer à la valeur de f que nous venons de trouver.

Chacune de nos sphères est polarisée comme si elle était soumise à l'action d'un champ uniforme d'intensité φ.

Donc d'après ce que nous avons vu au n° **49** tout se passe comme s'il existait deux sphères de même rayon que la sphère conductrice, l'une remplie de fluide positif de densité 1, l'autre de fluide négatif de densité 1, et si la sphère négative, coïncidant dans l'état d'équilibre normal avec la sphère positive, subissait sous l'influence d'un champ uniforme d'intensité φ un déplacement x_0 donné par la formule

$$\varphi = -\frac{4}{3}\pi x_0.$$

Tout se passera donc comme s'il y avait déplacement en bloc des fluides électriques de chacune des petites sphères. Mais, les sphères conductrices n'occupent pas le volume entier du diélectrique ; elles sont séparées entre elles par un milieu isolant jouissant des mêmes propriétés que l'air, et la somme de leurs volumes est au volume total du diélectrique dans le rapport de h à 1. La somme des charges positives qui se trouvent sur ces sphères est donc h fois plus petite que la somme de ces mêmes charges dans l'hypothèse où tout le volume de diélectrique serait occupé par des sphères conductrices. Comme il en est de même des charges négatives, il revient au même d'admettre que chacun des fluides est répandu dans tout le diélectrique avec une densité h, ou que chacun d'eux n'occupe qu'une fraction h du volume du diélectrique avec une densité 1. La valeur du déplacement moyen sera évidemment la même dans les deux cas. Si nous adoptons la première hypothèse nous pourrons appliquer à la sphère diélectrique les formules du n° **49** en y remplaçant x_0 par hx_0, puisque dans ces formules la densité est supposée égale à 1 et que maintenant elle est h. Cette quantité

hx_0 est donc le déplacement moyen que subit le fluide négatif dans le diélectrique soumis à l'influence du champ. Si nous remplaçons x_0 par sa valeur tirée de l'équation (1) nous avons pour ce déplacement $- h \frac{3\varphi}{4\pi}$ et par suite, pour le déplacement du fluide positif par rapport au fluide négatif, qui ne diffère que par le signe du précédent,

$$f' = h \frac{3\varphi}{4\pi}.$$

Or on a :

$$h = \frac{K-1}{K+2}. \tag{5}$$

Mais si par suite de cette relation les actions extérieures des diélectriques sont les mêmes dans les deux théories, les intensités des courants de déplacement n'ont pas la même valeur dans l'une et dans l'autre. En effet, si nous portons cette valeur de h dans l'expression de f' nous obtenons pour la valeur du déplacement dans la théorie de Poisson

$$f' = \frac{3\varphi}{4\pi} \frac{K-1}{K+2}, \tag{6}$$

qui diffère de celle du déplacement dans la théorie de Maxwell, donnée par la formule (4). Le rapport de ces quantités est

$$\frac{f'}{f} = \frac{K-1}{K}; \tag{7}$$

C'est aussi le rapport des intensités des couran
cement dans les deux théories. Dans l'air

rant de déplacement est nulle quand on adopte les idées de Poisson puisque la formule (6) donne $f' = 0$ pour $K = 1$ et que le pouvoir inducteur spécifique de l'air est l'unité. Dans la théorie de Maxwell, le déplacement dans l'air a, d'après la formule (4), la valeur $f = \frac{\varphi}{4\pi}$, et par suite, contrairement a ce qui a lieu dans la théorie de Poisson, l'intensité du courant de déplacement n'est pas nulle dans ce milieu. C'est là la différence la plus importante qui existe entre les deux théories dont nous venons de comparer les conséquences.

61. Modification de la théorie de Poisson. — Cellules. — Mais, ainsi que nous l'avons annoncé au commencement de ce chapitre, il est possible en introduisant dans la théorie de Poisson quelques modifications secondaires de faire concorder ses résultats avec ceux de la théorie de Maxwell. C'est ce que nous allons montrer.

Remarquons que si les formules (5) et (7), qui donnent h et le rapport des déplacements, ne sont pas homogènes, cela tient à ce que nous avons pris l'unité pour le pouvoir inducteur spécifique de la substance isolante qui sépare les sphères conductrices dans celle de Poisson.

Il serait facile de vérifier que si nous désignons par K_1 le pouvoir inducteur de cette substance, les formules (5) et (7) deviennent

$$h = \frac{K - K_1}{K + 2K_1}, \qquad \frac{f'}{f} = \frac{K - K_1}{K}.$$

Cette dernière formule montre que si K_1 est très petit le ort des déplacements est voisin de l'unité. Les intensités

des courants de déplacement auraient donc sensiblement la même valeur dans les deux théories si K_1 était infiniment petit, ce qui exige que h diffère infiniment peu de l'unité, c'est-à-dire que l'espace non conducteur qui sépare les sphères conductrices soit infiniment petit. Or, nous n'avons introduit l'hypothèse de la forme sphérique des conducteurs disséminés dans le diélectrique que pour avoir plus de simplicité dans les calculs ; les conséquences restant vraies pour une forme quelconque des conducteurs nous pouvons nous représenter un diélectrique comme formé de *cellules* conductrices séparées par des cloisons non conductrices. Il suffit alors Scheiden
pour faire concorder la théorie de Poisson avec celle de Maxwell de supposer que ces cloisons ont une épaisseur infiniment petite, puisqu'alors h diffère infiniment peu de l'unité, et, qu'elles sont formées d'une substance isolante de pouvoir inducteur spécifique K_1 infiniment petit. Montrons que cette concordance se retrouve dans toutes les conséquences de la théorie de Maxwell et qu'au point de vue mathématique cette dernière théorie est identique avec celle de Poisson ainsi modifiée.

62. Propagation de la chaleur dans un milieu homogène. — La suite des calculs nécessaires nous conduira à des relations tout à fait pareilles à celles qu'a établies Fourier dans l'étude de la conductibilité de la chaleur. Dans le but de faire ressortir l'analogie mathématique qui existe entre les phénomènes électriques et les phénomènes calorifiques nous commencerons par rappeler brièvement la théorie de Fourier.

Cette théorie repose sur les hypothèses suivantes : quand deux molécules d'un corps sont à des températures différentes,

il y a passage de chaleur de la plus chaude à la plus froide ; la quantité de chaleur qui passe pendant un temps donné est une fonction de la distance, qui tend rapidement vers zéro quand la distance croît, et qui ne dépend pas de la température ; enfin cette quantité de chaleur est proportionnelle à la différence $V_1 - V_2$ des températures des deux molécules. Il résulte de ces hypothèses que la quantité de chaleur qui passe pendant un temps dt d'une molécule à une autre est

$$dq = - C dt \Delta V, \tag{1}$$

ΔV représentant la variation de la température quand on se déplace dans le sens du flux calorifique et C étant une quantité indépendante de la température.

63. Considérons un parallélipipède rectangle infiniment petit

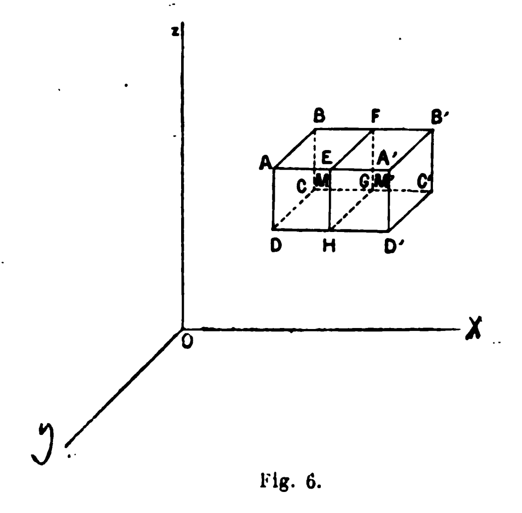


Fig. 6.

ABCD A'B'C'D' (*fig.* 6) situé dans le corps et prenons trois axes de coordonnées respectivement parallèles à trois arêtes du

parallélipipède. Soient $d\tau$ son volume, $d\omega$ la surface de sa section par un plan perpendiculaire à l'axe des x, a et b les coordonnées des deux extrémités A et A' d'une arête parallèle à cet axe ; on a la relation

$$d\tau = d\omega\ (b-a).$$

Cherchons la quantité de chaleur $Qd\omega dt$ qui traverse la section $d\omega$ pendant l'intervalle de temps dt. Pour cela calculons de deux manières différentes l'intégrale

$$(2) \qquad \int_a^b (Qd\omega dt)\, dx,$$

qui donne la somme des quantités de chaleur qui traversent toutes les sections du parallélipipède perpendiculaires à ox pendant le temps dt.

L'intégration donne immédiatement, si l'on regarde comme constante la quantité de chaleur qui traverse chaque section $d\omega$ du parallélipipède infiniment petit,

$$Qd\omega dt\ (b-a) = Qd\tau dt.$$

64. Pour trouver une autre expression de cette quantité, coupons le parallélipipède par une section quelconque EFGH perpendiculaire à Ox et prenons de part et d'autre deux molécules M et M'. D'après les hypothèses de Fourier la quantité de chaleur qui passe de l'une à l'autre pendant le temps dt est

$$(3) \qquad qdt = -\ Cdt\Delta V,$$

et la somme des quantités de chaleur qui passent par

toutes les sections du parallélipipède est

$$\int_a^b (q dt)\, dx.$$

Mais pour les sections qui ne sont pas comprises entre les molécules il n'y a pas passage de chaleur et les éléments de l'intégrale qui correspondent à ces sections sont nuls. Il suffit donc de prendre pour limites de l'intégrale les valeurs x et $x + \Delta x$ des coordonnées des points M et M'; on obtient

$$\int_x^{x+\Delta x} (q dt)\, dx = q \Delta x dt.$$

Les autres couples de molécules du parallélipipède donnent des quantités analogues. Leur somme est précisément la valeur de l'intégrale (2) et nous avons

$$(4) \qquad Q d\tau dt = \Sigma q \Delta x dt.$$

Mais la relation (3) nous donne pour q,

$$q = -\mathrm{C}\left(\frac{dV}{dx}\Delta x + \frac{dV}{dy}\Delta y + \frac{dV}{dz}\Delta z\right),$$

en négligeant dans le développement les puissances de Δx, Δy, Δz, égales et supérieures à 2, ce qui est permis, les échanges de chaleur étant supposés n'avoir lieu qu'entre molécules très voisines et les termes négligés étant alors très petits par rapport aux premiers termes du développement. Portant alors cette valeur de q dans la relation (4), nous obtenons

$$(5) \quad Q d\tau = -\frac{dV}{dx}\sum \mathrm{C}\Delta x^2 - \frac{dV}{dy}\sum \mathrm{C}\Delta x \Delta y - \frac{dV}{dz}\sum \mathrm{C}\Delta x \Delta z.$$

C étant par hypothèse indépendant de la température, les coefficients des dérivées partielles de V n'en dépendent pas non plus. Par conséquent Q est une fonction linéaire et homogène de ces dérivées.

65. Si le corps considéré est isotrope cette fonction se réduit à un seul terme. En effet, dans ce cas l'expression de Q ne doit pas changer quand on y remplace x par $-x$ et il faut, pour qu'il en soit ainsi que les dérivées partielles de V par rapport à y et à z disparaissent du second membre. Nous avons donc simplement

$$Q d\tau = -\frac{dV}{dx} \Sigma C \Delta x^2,$$

et si nous posons

$$A = \frac{\Sigma C \Delta x^2}{d\tau},$$

il vient

$$Q = -A \frac{dV}{dx}.$$

La constante A est le *coefficient de conductibilité thermique* du milieu.

Le milieu étant supposé isotrope la valeur de ce coefficient est la même pour toutes les directions ; nous aurons donc pour la quantité de chaleur par unité de surface à travers un élément de surface perpendiculaire à l'un des autres axes de coordonnées

$$Q = -A \frac{dV}{dy},$$

$$Q = -A \frac{dV}{dz}.$$

D'une manière générale, nous aurons pour un élément orienté d'une manière quelconque

$$Q = -A\frac{dV}{dn}, \tag{6}$$

dn étant une longueur infiniment petite prise sur la normale à l'élément.

66. Analogies avec le déplacement de l'électricité dans les cellules. — A l'intérieur de chacune des cellules conductrices le potentiel ψ est constant, mais ce potentiel varie brusquement quand on traverse les parois isolantes qui limitent les cellules; ψ est donc une fonction discontinue des coordonnées. Nous ne pourrions introduire cette fonction dans nos calculs sans faire d'hypothèses sur sa forme, il est plus simple de considérer à sa place une fonction continue dont la valeur en chaque point diffère peu de celle de ψ. Nous supposerons que ces deux fonctions prennent les mêmes valeurs aux centres de gravité G_1, G_2, G_3..... des diverses cellules; l'erreur commise en substituant à ψ une fonction continue sera alors du même ordre de grandeur que les dimensions des cellules, dimensions que nous pouvons toujours supposer très petites.

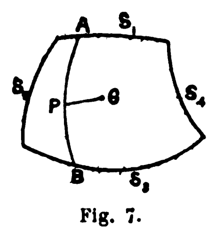


Fig. 7.

Considérons une de ces cellules (*fig.* 7). Lorsque le diélectrique n'est pas soumis à l'action d'un champ cette cellule est à l'état neutre; dans le cas contraire elle présentera sur ses faces S_1, S_2, S_3, S_4, des quantités d'électricité q_1, q_2, q_3, q_4, mais comme la cellule conductrice ne cesse pas d'être isolée la

somme de ces quantités est nulle :

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0.$$

Si la valeur du champ vient à changer, les charges de chacune des faces de la cellule varient, mais leur somme restant nulle, on a, en appelant dq_1, dq_2..... les variations produites pendant un intervalle de temps dt,

$$dq_1 + dq_2 + dq_3 + dq_4 = 0.$$

Il ne peut donc y avoir augmentation de la charge de l'une des faces que s'il y a diminution sur quelque autre. Supposons, pour fixer les idées que la charge de S_3 augmente et que celle de S_1 diminue. Une certaine quantité d'électricité passera de S_1 à S_3 en suivant un chemin que nous représenterons par APB. Mais il revient évidemment au même de supposer que l'électricité suit le chemin APGPB puisque la portion PG qui joint un point quelconque P du chemin réel au centre de gravité de la cellule est parcourue successivement dans les deux sens. On peut donc considérer le passage d'une certaine quantité d'électricité de S_1 à S_3 comme résultant du passage de cette même quantité de G à S_3 et du passage d'une quantité égale mais de signe contraire de G à S_1. Tout se passe donc comme si, par suite de la variation du champ, des quantités dq_1, dq_2 .... d'électricité allaient du centre de gravité G aux diverses surfaces de la cellule.

67. Prenons maintenant deux cellules contiguës de centres de gravité G_1 et G_2 (*fig.* 8). Soient S_1 et S_2 les faces de chacune de ces cellules qui se trouvent en regard. Ces deux faces

peuvent être considérées comme les armatures d'un condensateur à faces parallèles et infiniment voisines et si nous supposons que la charge de S_1 augmente de dq, il résulte nécessairement une diminution de charge $-dq$, sur la surface en regard de S_2. D'après ce que nous avons dit précédemment, l'augmentation dq de la charge de S_1 peut être considérée comme résultant du passage de dq de G_1 à S_1. De même, la diminution de la charge de S_2 peut être regardée comme provenant du passage d'une quantité $-dq$ de G_2 à S_2, ou ce qui revient au même, du passage de dq de S_2 à G_2. Mais alors c'est comme si la quantité dq allait de G_1 à G_2. On peut donc dire qu'il y a échange d'électricité entre les molécules G_1 et G_2 et nous commençons à voir apparaître l'analogie avec les phénomènes calorifiques.

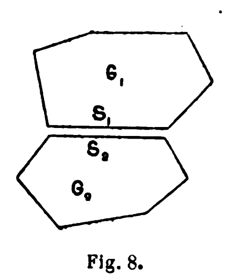


Fig. 8.

68. Appelons C la capacité du condensateur formé par les surfaces S_1 et S_2, ψ_1 et ψ_2 les valeurs du potentiel dans chacune des cellules ; nous aurons pour la valeur absolue de la quantité d'électricité située sur S_1 et S_2

$$q = C(\psi_1 - \psi_2).$$

Comme c'est la face de la cellule dont le potentiel est le plus élevé qui se charge d'électricité positive, l'électricité positive, dans le déplacement fictif que nous avons supposé s'effectuer entre les centres de gravité, passe d'un centre de gravité à un autre de potentiel moins élevé. Par conséquent, en appelant $\Delta\psi$ la variation du potentiel dans le sens du

déplacement, nous avons pour la quantité d'électricité qui passe d'un centre de gravité à un autre

$$q = - C\Delta\psi.$$

Pendant un intervalle de temps dt, la variation de la différence de potentiel $\Delta\psi$ entre les points considérés sera $dt \frac{d}{dt} \Delta\psi$ ou $dt\Delta \frac{d\psi}{dt}$; par suite, la quantité d'électricité qui passe d'un de ces points à l'autre pendant ce même intervalle est

$$dq = - Cdt\Delta \frac{d\psi}{dt}.$$

Cette formule est identique à la formule (1) du n° **62** qui donne la quantité de chaleur qui passe d'une molécule à une autre, C étant d'ailleurs dans l'une et l'autre formule indépendant de la quantité dont la variation est indiquée par Δ.

69. La loi des échanges d'électricité étant la même que celle des échanges de chaleur dans la théorie de Fourier, nous obtiendrons la quantité d'électricité rapportée à l'unité de surface à travers un élément quelconque en remplaçant dans la formule (6) (**65**), la température V par la quantité $\frac{d\psi}{dt}$. En appelant, comme le fait Maxwell,

$$ud\omega dt, \qquad vd\omega dt, \qquad wd\omega dt$$

les quantités d'électricité qui traversent pendant le temps dt des éléments $d\omega$ respectivement perpendiculaires aux axes de

coordonnées, nous aurons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -A\frac{d^2\psi}{dtdx}, \\ v &= -A\frac{d^2\psi}{dtdy}, \\ w &= -A\frac{d^2\psi}{dtdz}. \end{aligned} \right.$$

Or, u, v, w sont dans la théorie de Maxwell les composantes de la vitesse du déplacement électrique, et par suite, puisque f, g, h, représentent les composantes de ce déplacement,

$$u = \frac{df}{dt}, \qquad v = \frac{dg}{dt}, \qquad w = \frac{dh}{dt}.$$

Si donc on adopte pour u, v, w, les valeurs que nous venons de trouver, on obtient pour f,

$$(8) \qquad f = -A\frac{d\psi}{dx}.$$

Comme dans la théorie de Maxwell,

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx},$$

on voit que la théorie des cellules concordera avec celle de Maxwell, si nous posons

$$A = \frac{K}{4\pi}.$$

70. Cherchons à retrouver la relation qui dans la théorie de Maxwell exprime l'incompressibilité du fluide inducteur.

La quantité totale d'électricité contenue dans chaque cellule étant nulle à chaque instant, la quantité d'électricité qui pénètre pendant un intervalle de temps quelconque à travers une surface fermée qui limite un volume est également nulle. Or, u, v, w, étant les composantes suivant les trois axes de la vitesse avec laquelle s'effectue le mouvement de l'électricité, la composante de cette vitesse suivant la normale à un élément $d\omega$ de la surface est

$$\alpha u + \beta v + \gamma w,$$

α, β, γ, désignant les cosinus directeurs de la normale. Par suite, la quantité d'électricité qui traverse $d\omega$ pendant l'unité de temps est

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\omega,$$

et la quantité qui traverse la surface fermée pendant le même temps est égale à l'intégrale

$$\int (\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\omega$$

étendue à tous les éléments de cette surface. Pendant un intervalle de temps dt, la quantité d'électricité traversant la surface fermée est le produit de l'intégrale précédente par dt. En intégrant par rapport au temps, on aura la quantité d'électricité traversant la surface pendant un temps quelconque, et, comme cette quantité est nulle, l'intégrale obtenue doit être égale à o. Si nous remarquons que u, v, w sont les dérivées par rapport au temps des composantes f, g, h du déplacement, nous avons pour cette intégrale

$$\int (\alpha f + \beta g + \gamma h)\, d\omega = 0. \tag{9}$$

Or, on sait que

$$\int \alpha f d\omega = \int \frac{df}{dx} d\tau,$$

la première intégrale étant étendue à une surface fermée, la seconde, au volume limité par cette surface. En transformant de la même manière les deux autres termes de l'intégrale (9), nous obtenons

$$\int \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) d\tau = 0.$$

Cette égalité devant être satisfaite quel que soit le volume considéré, nous en concluons

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0.$$

C'est bien la relation qui, dans la théorie de Maxwell, lie entre elles les dérivées des composantes du déplacement du fluide inducteur d'un milieu diélectrique.

71. Identité des expressions de l'énergie potentielle. — Montrons enfin que la théorie des cellules conduit à la même expression de l'énergie potentielle que la théorie de Maxwell.

On sait que l'énergie potentielle d'un système de conducteurs électrisés est égale à la demi-somme des produits de la charge de chaque conducteur par son potentiel. Les charges des surfaces en regard de deux cellules contiguës sont égales et de signes contraires; par suite, si ψ_1 et ψ_2 sont les potentiels de ces cellules, le terme fourni à l'énergie potentielle par ces

charges est

$$\frac{1}{2}\left(q\psi_1 - q\psi_2\right) = -\frac{1}{2} q\Delta\psi.$$

D'ailleurs si C est la capacité du condensateur formé par les surfaces considérées, on a

$$q = -C\Delta\psi,$$

et le terme précédent devient

$$\frac{1}{2} C (\Delta\psi)^2.$$

En développant $\Delta\psi$ par rapport aux puissances croissantes de Δx, Δy, Δz, et en négligeant les puissances de ces quantités supérieures à la première, nous obtenons

$$\Delta\psi = \frac{d\psi}{dx}\Delta x + \frac{d\psi}{dy}\Delta y + \frac{d\psi}{dx}\Delta z.$$

Considérons donc un élément de volume $d\tau$ assez petit pour que nous puissions admettre que les dérivées partielles de ψ ont la même valeur en tout point de cet élément, mais assez grand toutefois pour contenir un très grand nombre de cellules, et par conséquent, un très grand nombre de petits condensateurs.

L'énergie potentielle dW de cet élément, sera la somme des énergies potentielles des divers petits condensateurs qui y sont contenus, on aura donc :

$$(10)\quad dW = \frac{1}{2}\sum C(\Delta\psi)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\sum C\Delta x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2\sum C\Delta y^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\sum C\Delta z^2 + \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\sum C\Delta x\Delta y + \ldots$$

Mais nous avons fait remarquer à propos des phénomènes calorifiques que dans le cas d'un milieu isotrope, les sommes

$$\sum C\Delta x\Delta y, \quad \sum C\Delta y\Delta z, \quad \sum C\Delta z\Delta x$$

sont nulles. Nous avons posé

$$A = \frac{\Sigma C\Delta x^2}{d\tau} = \frac{\Sigma C\Delta y^2}{d\tau} = \frac{\Sigma C\Delta z^2}{d\tau}.$$

Par conséquent, nous aurons pour l'énergie potentielle de l'élément $d\tau$,

$$dW = \frac{A d\tau}{2}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right].$$

Si nous remplaçons dans cette expression les dérivées partielles par leurs valeurs tirées de la relation (8) du n° **69**,

$$f = -A\frac{d\psi}{dx}$$

et des relations analogues qui contiennent g et h, et si nous donnons à A la valeur $\frac{K}{4\pi}$ que nous avons été conduits à lui attribuer pour faire concorder la théorie des cellules et de celle de Maxwell, nous obtenons

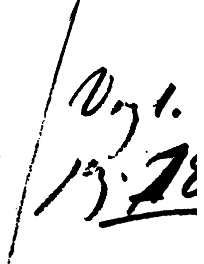
$$dW = \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau.$$

L'énergie potentielle du volume fini sera donnée par l'intégrale

$$W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau.$$

Cette expression est identique à celle que nous avons déduite (32) de la théorie de Maxwell et, comme dans cette dernière théorie, l'énergie potentielle d'un système électrisé se trouve dans le milieu diélectrique qui sépare les conducteurs.

72. *Remarque.* — Dans les calculs précédents, nous avons admis qu'en chaque point du diélectrique, la force électrique ne dépend que de l'état électrostatique du système électrisé. S'il en était autrement, si, par exemple, outre la force électromotrice due aux actions électrostatiques, s'exerçait une force électromotrice d'induction, les formules auxquelles nous sommes parvenus devraient être modifiées.



En particulier, la composante f du déplacement ne serait plus donnée par la formule

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx},$$

mais par la formule

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx} - X\right),$$

où X désigne la composante suivant l'axe des x de la force électromotrice d'induction.

Pour le montrer cherchons la variation $\Delta\psi$ du potentiel quand on passe du centre de gravité G_1 d'une cellule au centre de gravité G_2 d'une cellule contiguë. Elle est égale à la variation brusque H qui se produit quand on traverse la paroi isolante augmentée du travail qu'il faut effectuer à l'encontre des forces d'induction pour faire passer l'unité d'électricité positive de G_1 à G_2. Si donc $-X$, $-Y$, $-Z$ sont les composantes de la force électromotrice d'induction quand on

passe de G_1 à G_2, on a pour $\Delta\psi$.

$$\Delta\psi = H + X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z.$$

La charge électrique q d'un de nos petits condensateurs sera égale au produit de la capacité de ce condensateur, par la différence de potentiel H de ses deux armatures ; il viendra donc :

$$q = - CH = - C\Delta\psi + C\,(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)$$

et, au lieu d'avoir simplement

$$q = - C\Delta\psi = - C\left(\frac{d\psi}{dx}\Delta x + \frac{d\psi}{dy}\Delta y + \frac{d\psi}{dz}\Delta z\right)$$

on aura

$$q = - C\left[\Delta x\left(\frac{d\psi}{dx} - X\right) + \Delta y\left(\frac{d\psi}{dy} - Y\right) + \Delta z\left(\frac{d\psi}{dz} - Z\right)\right].$$

Dans toutes nos formules, il faudra donc remplacer

$$\frac{d\psi}{dx},\ \frac{d\psi}{dy}\ \text{et}\ \frac{d\psi}{dz}$$

par

$$\frac{d\psi}{dx} - X,\ \frac{d\psi}{dy} - Y,\ \frac{d\psi}{dz} - Z.$$

La formule

$$f = -\frac{4\pi}{K}\frac{d\psi}{dx},$$

devient donc

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx} - X\right).$$

ou

$$\frac{d\psi}{dx} = X - \frac{4\pi}{K} f.$$

73. Cas des corps anisotropes. — Il importe, pour pouvoir établir la théorie électromagnétique de la double réfraction de voir ce que deviennent ces formules dans les corps anisotropes.

Reprenons la formule (10) du n° **71.** Si dans cette formule on regardait $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$ et $\frac{d\psi}{dz}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace et dW comme une constante, on aurait l'équation d'un ellipsoïde.

Si l'on fait un changement d'axes de coordonnées, cet ellipsoïde fictif conservera la même forme, mais sa position par rapport aux axes variera.

Prenons donc pour axes de coordonnées les axes de cet ellipsoïde, son équation deviendra :

$$dW = \frac{A d\tau}{2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{A' d\tau}{2}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \frac{A'' d\tau}{2}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2;$$

et on aura :

$$(11)\quad \begin{cases} A = \frac{\Sigma C \Delta x^2}{d\tau}, \quad A' = \frac{\Sigma C \Delta y^2}{d\tau}, \quad A'' = \frac{\Sigma C \Delta z^2}{d\tau} \\ \sum C \Delta x \Delta y = \sum C \Delta x \Delta z = \sum C \Delta y \Delta z = 0. \end{cases}$$

Reprenons la formule (5) de la théorie de Fourier (**64**). En vertu des équations (**11**) elle se réduira a

$$Q = - A \frac{dV}{dx}.$$

Or nous avons vu au n° **69** que pour passer de la théorie de Fourier à celle des échanges d'électricité qui ont lieu entre nos cellules, il suffit de changer V en $\frac{d\psi}{dt}$. Il vient donc encore,

$$u = - A \frac{d^2\psi}{dtdx}$$

et de même

$$v = - A' \frac{d^2\psi}{dtdy} \qquad w = - A'' \frac{d^2\psi}{dtdz}.$$

La seule différence avec les équations (7), c'est que les coefficients de $\frac{d^2\psi}{dtdx}$, $\frac{d^2\psi}{dtdy}$, $\frac{d^2\psi}{dtdz}$ ne sont plus égaux entre eux.

On en déduit :

$$f = - A \frac{d\psi}{dx} = - \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx},$$

$$g = - A' \frac{d\psi}{dy} = - \frac{K'}{4\pi} \frac{d\psi}{dy},$$

$$h = - A'' \frac{d\psi}{dz} = - \frac{K''}{4\pi} \frac{d\psi}{dz},$$

en posant

$$K = 4\pi A, \quad K' = 4\pi A', \quad K'' = 4\pi A''.$$

S'il existe des forces électromotrices d'induction dont les composantes soient X, Y et Z, ces formules deviennent :

$$(12) \qquad f = - \frac{K}{4\pi} \left(\frac{d\psi}{dx} - X \right),$$

$$g = - \frac{K'}{4\pi} \left(\frac{d\psi}{dy} - Y \right),$$

$$h = - \frac{K''}{4\pi} \left(\frac{d\psi}{dz} - Z \right)$$

On trouve d'ailleurs :

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0,$$

et

$$W=\int dW=\int 2\pi d\tau\left(\frac{f^2}{K^2}+\frac{g^2}{K'^2}+\frac{h^2}{K''^2}\right).$$

74. Discussion. — La théorie des cellules ne peut pas plus être adoptée définitivement que celle du fluide inducteur. Cette constitution hétérogène paraît difficile à admettre pour les diélectriques liquides ou gazeux *et surtout pour le vide interplanétaire.* J'ai tenu néanmoins à exposer ces deux théories : elles seraient incompatibles si on les regardait comme exprimant la réalité objective, elles seront toutes deux utiles si on les considère comme provisoires. Si je m'étais borné à développer l'une d'elles, j'aurais laissé croire (ce que croient bien des personnes, mais ce qui me semble faux) que Maxwell regardait le déplacement électrique comme le véritable déplacement d'une véritable matière.

Le fond de sa pensée est bien différent comme nous le verrons plus loin.

CHAPITRE IV

DÉPLACEMENT DES CONDUCTEURS SOUS L'ACTION DES FORCES ÉLECTRIQUES
THÉORIE PARTICULIÈRE A MAXWELL

75. Forces s'exerçant entre conducteurs électrisés. — Jusqu'ici, nous avons supposé dans notre étude que les conducteurs électrisés restaient immobiles. Or, nous savons, par exemple, que deux conducteurs électrisés se repoussent ou s'attirent suivant qu'ils sont chargés d'électricité de même nom ou d'électricité de noms contraires. L'électricité agit donc sur la matière. Quelle est la nature de cette action? C'est ce que nous ne pouvons dire avec précision, ignorant la nature de la cause de l'action, la nature de l'électricité. Toutefois nous n'avons nullement besoin de la connaître pour avoir la valeur de la force qui s'exerce entre deux conducteurs; il nous suffit d'appliquer le principe de la conservation de l'énergie.

En effet considérons deux conducteurs C et C' possédant des charges électriques M et M'. Supposons que le conducteur C puisse se déplacer, mais sans tourner autour de son centre de gravité. La connaissance des coordonnées ξ, η, ζ de ce point suffira alors pour définir la position de C dans l'espace. L'énergie potentielle du système des deux conducteurs dépend évidemment de la position du conducteur C par rapport au

conducteur C′ et aussi des charges de ces conducteurs. La position de C se trouvant définie, d'après notre hypothèse par les coordonnées de son centre de gravité, l'énergie potentielle W du système est donc une fonction de ces coordonnées et des charges M et M′ ; nous pouvons poser

$$W = F(\xi, \eta, \zeta, M, M').$$

Pour que le système soit en équilibre, il faut appliquer au conducteur mobile C une force égale et contraire à la force qu'exerce sur lui le conducteur C′ ; soient — X, — Y, — Z les composantes de la force qu'il faut appliquer à C. Puisqu'il y a équilibre la somme des travaux virtuels de toutes les forces agissant sur le système, tant intérieures qu'extérieures, doit être nulle. Pour un déplacement $\delta\xi$ du centre de gravité de C le travail de la force extérieure est $-X\delta\xi$, celui des forces intérieures est $\frac{dW}{d\xi}\delta\xi$; nous avons donc

$$-X\delta\xi + \frac{dW}{d\xi}\delta\xi = 0.$$

Nous tirons de cette équation pour la valeur de la composante X de la force exercée par C′ sur C,

$$X = \frac{dW}{d\xi}.$$

76. L'hypothèse la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse faire pour expliquer les attractions et répulsions entre conducteurs électrisés est d'attribuer ces actions à l'élasticité du fluide répandu entre les conducteurs et de chercher à appliquer à ce fluide les principes ordinaires de la théorie de l'élasticité. Malheureusement les conséquences de cette hypothèse

ne sont pas conformes aux faits expérimentaux. En effet, dans un fluide élastique les forces élastiques résultant de déplacements très petits sont des fonctions linéaires de ces déplacements. Par conséquent l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placés conduirait à admettre que la force qui s'exerce entre deux conducteurs électrisés est une fonction linéaire des charges électriques des conducteurs. Il en résulterait qu'en doublant les charges de chaque conducteur on devrait avoir une force double ; or, on sait que si les charges de deux conducteurs viennent à être doublées la force qui s'exerce entre eux est quadruplée.

Bien d'autres hypothèses ont été proposées pour expliquer cette action des conducteurs électrisés. Si quelques-unes ont le mérite de conduire à des conséquences conformes à l'expérience elles présentent l'inconvénient d'être compliquées et aucune raison ne peut être invoquée pour faire préférer l'une de ces théories à l'autre. Aussi, ne nous étendrons-nous pas sur ce sujet et nous bornerons-nous à exposer la théorie que Maxwell a proposée.

77. Théorie de Maxwell. — Prenons un élément de volume $d\tau$ d'un conducteur électrisé et soit ρ la densité de l'électricité libre au centre de gravité de cet élément. Par électricité libre nous entendons dans la théorie des deux fluides, l'excès de l'électricité positive sur l'électricité négative ; et dans la théorie du fluide unique l'excès de l'électricité contenue dans l'élément sur la quantité que ce même élément contiendrait à l'état neutre. Les deux théories sont d'ailleurs absolument équivalentes.

La masse électrique de l'élément est donc $\rho d\tau$, et si ψ est la

valeur du potentiel au centre de gravité la force qui s'exerce sur cette masse électrique a pour composantes

$$-\rho d\tau \frac{d\psi}{dx}, \quad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dy}, \quad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dz}.$$

L'expérience nous apprend que la force qui agit sur l'élément matériel lui-même est égale à celle qui agit sur l'électricité qui y est contenue et par conséquent que cet élément ne pourra se maintenir en équilibre que si on lui applique une force destinée à contrebalancer l'attraction électrostatique.

Si on appelle $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ les composantes de cette force, on devra avoir:

$$(1) \qquad X = \rho \frac{d\psi}{dx} \qquad Y = \rho \frac{d\psi}{dy} \qquad X = \rho \frac{d\psi}{dz}.$$

Dans l'idée de Maxwell, qui dans toutes ses théories cherche à éviter l'hypothèse des actions électriques s'exerçant à distance, les répulsions et les attractions des conducteurs sont dues à des pressions sur la matière pondérable se transmettant à travers la matière diélectrique. — Cherchons la résultante de ces pressions.

78. La pression qui s'exerce sur un élément de surface n'est pas nécessairement normale à cet élément. Désignons par

$$P_{xx}\, d\omega, \qquad P_{xy}\, d\omega, \qquad P_{xz}\, d\omega$$

les composantes suivant les trois axes de la pression qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à l'axe des x; par:

$$P_{yx}\, d\omega, \qquad P_{yy}\, d\omega, \qquad P_{yz}\, d\omega$$

les composantes de la pression sur un élément perpendiculaire à oy : enfin par

$$P_{zx}\, d\omega, \qquad P_{zy}\, d\omega, \qquad P_{zz}\, d\omega$$

les composantes sur un élément perpendiculaire à oz. Ces neuf quantités suffisent pour déterminer la pression sur un élément de surface orienté d'une manière quelconque. D'ailleurs, ces neuf quantités se réduisent à six. En effet la théorie de l'élasticité nous apprend qu'on doit avoir :

$$(2) \qquad P_{xy} = P_{yx} \qquad P_{yz} = P_{yz} \qquad P_{xz} = P_{xz}$$

79. Considérons maintenant un parallélipipède rectangle (*fig.* 9) dont les arêtes, que nous supposerons parallèles aux axes de coordonnées, ont pour longueurs dx, dy, dz, et écrivons que ce parallélipipède est en équilibre sous l'action des pressions qui s'exercent sur ses faces et sous l'action de la force extérieure dont les composantes sont $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$.

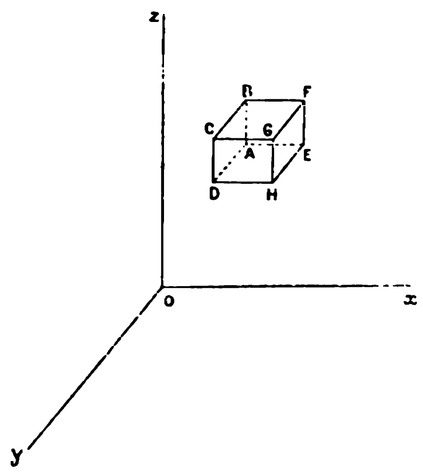


Fig. 9.

Les équations qui expriment que la somme des moments des forces par rapport à chacun des trois axes de coordonnées est nulle conduisent précisément aux relations (2). Exprimons donc seulement que la somme des composantes suivant un

des axes des forces qui agissent sur le parallélipipède est nulle.

La pression qui s'exerce sur la face ABCD a pour composante parallèle à Ox, $P_{xx}\,dy\,dz$; la pression qui s'exerce sur la face opposée EFGH a pour composante suivant la même direction $\left(P_{xx} + \frac{dP_{xx}}{dx}\,dx\right)dy\,dz$. Nous adopterons la notation de Maxwell qui regarde les tensions comme positives et les pressions comme négatives; la résultante de ces deux forces se réduit alors à leur somme algébrique.

$$\frac{dP_{xx}}{dx}\,dx\,dy\,dz = \frac{dP_{xx}}{dx}\,d\tau.$$

Nous trouverions de la même manière pour la somme algébrique des composantes parallèles à Ox des pressions qui s'exercent sur les autres faces du parallélipipède,

$$\frac{dP_{yx}}{dy}\,d\tau, \qquad \frac{dP_{zx}}{dz}\,d\tau.$$

La somme de ces quantités doit être égale à $-\,X d\tau$; nous avons donc

$$\frac{dP_{xx}}{dx}\,d\tau + \frac{dP_{yx}}{dy}\,d\tau + \frac{dP_{zx}}{dz}\,d\tau = -\,X d\tau = -\,\rho\,d\tau\,\frac{d\psi}{dx}.$$

En écrivant que les sommes des composantes des pressions suivant les axes des y et des z sont égales aux composantes de la force extérieure suivant les mêmes axes, nous obtiendrons deux équations analogues. En divisant les deux membres de chacune de ces équations par $d\tau$, nous aurons, en tenant

compte des relations (2) :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dP_{xx}}{dx}+\dfrac{dP_{yx}}{dy}+\dfrac{dP_{zx}}{dz}=-\rho\dfrac{d\psi}{dx},\\[2mm] \dfrac{dP_{yx}}{dx}+\dfrac{dP_{yy}}{dy}+\dfrac{dP_{zy}}{dz}=-\rho\dfrac{d\psi}{dy},\\[2mm] \dfrac{dP_{zx}}{dx}+\dfrac{dP_{zy}}{dy}+\dfrac{dP_{zz}}{dz}=-\rho\dfrac{d\psi}{dz}. \end{cases}$$

80. Ce système de trois équations contient six inconnues; il admet donc une infinité de solutions. Maxwell prend la suivante :

$$(4)\quad \begin{cases} P_{xx}=\dfrac{K}{8\pi}\left[\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dz}\right)^2\right]\\[2mm] P_{yy}=\dfrac{K}{8\pi}\left[\left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dz}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2\right]\\[2mm] P_{zz}=\dfrac{K}{8\pi}\left[\left(\dfrac{d\psi}{dz}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2-\left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2\right]\\[2mm] P_{yx}=P_{xy}=\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\psi}{dy}\\[2mm] P_{zy}=P_{yz}=\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{d\psi}{dy}\dfrac{d\psi}{dz}\\[2mm] P_{xz}=P_{zx}=\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\psi}{dz}. \end{cases}$$

Montrons que ce système de solutions satisfait bien aux équations (3). On a

$$\frac{dP_{xx}}{dx}=\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{d\psi}{dy}\frac{d^2\psi}{dxdy}-\frac{d\psi}{dz}\frac{d^2\psi}{dxdz}\right),$$

$$\frac{dP_{xy}}{dy}=\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d^2\psi}{dxdy}\right),$$

$$\frac{dP_{zx}}{dz}=\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d^2\psi}{dxdz}\right).$$

et le premier membre de la première équation devient, après réduction,

$$\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)=\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\Delta\psi.$$

Or on a vu (**12**) que dans un milieu diélectrique homogène, on a

$$K\Delta\psi = -4\pi\rho.$$

Par conséquent le premier membre de l'équation considérée peut s'écrire

$$-\rho\frac{d\psi}{dx},$$

ce qui montre que cette équation est satisfaite. On s'assurerait de la même manière que les deux dernières des équations (3) sont vérifiées par la solution adoptée par Maxwell.

81. Prenons pour axe des x la direction de la force électromotrice en un point et pour axes des y et des z deux droites rectangulaires perpendiculaires à cette direction. Si nous désignons par F la valeur absolue de la force électromotrice, nous avons dans ce nouveau système d'axes

$$\frac{d\psi}{dx}=-F,\quad \frac{d\psi}{dy}=0,\quad \frac{d\psi}{dz}=0.$$

En portant ces valeurs dans les relations (4), nous obtenons

$$P_{xx}=\frac{KF^2}{8\pi}$$

$$P_{yy}=P_{zz}=-\frac{KF^2}{8\pi}$$

$$P_{xy}=P_{yx}=P_{yz}=P_{zy}=P_{zx}=P_{xz}=0.$$

Il résulte de ces égalités que la pression sur un élément de surface perpendiculaire à la direction de la force électromotrice ou parallèle à cette direction est normale à cet élément. Sur un élément oblique par rapport à cette direction, la pression est oblique ; la composante suivant la direction de la force électromotrice étant positive, il y a *tension* suivant cette direction ; pour une direction normale la pression est négative, il y a donc d'après la notation adoptée par Maxwell, *pression* au sens propre de ce mot suivant cette direction. En outre la tension qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à la force électromotrice et la pression qui s'exerce sur un élément parallèle à cette force sont égales en valeur absolue.

82. Discussion. — La théorie précédente, considérée en elle-même, rend bien compte des lois connues des attractions électrostatiques. Si on l'adopte, il faudra admettre que ces attractions sont dues à des pressions et à des tensions qui se développent dans un fluide élastique particulier qui remplirait les diélectriques.

Mais il faudra supposer en même temps que les lois de l'élasticité de ce fluide diffèrent absolument des lois de l'élasticité des corps matériels que nous connaissons, des lois de l'élasticité admises pour l'éther luminifère, qu'elles diffèrent enfin des lois que nous avons été conduits à admettre pour l'élasticité du fluide inducteur.

Pour ces deux fluides hypothétiques en effet, comme pour les fluides pondérables eux-mêmes, les forces élastiques sont proportionnelles aux déplacements qui les produisent, et il en serait de même des variations de pressions dues à l'action de

ces forces. La pression, quelles que soient d'ailleurs les hypothèses complémentaires que l'on fasse, devrait donc s'exprimer linéairement à l'aide du potentiel et de ses dérivées. Au contraire nous venons d'être conduits à des valeurs de la pression qui sont du 2e degré par rapport aux dérivées du potentiel.

Une fois que rompant avec des habitudes d'esprit invétérées nous aurons consenti à attribuer ces propriétés paradoxales au fluide hypothétique qui remplit les diélectriques, nous n'aurons plus d'objection à faire à la théorie précédente considérée en elle-même. Mais cependant, si elle n'implique pas de contradiction interne, on peut se demander si elle est compatible avec les autres théories de Maxwell, par exemple avec la théorie du déplacement électrique que nous avons exposée plus haut sous le nom de théorie du fluide inducteur.

Il est évident que la conciliation entre ces deux théories est impossible ; car nous avons été conduits à attribuer au fluide inducteur une pression égale à ψ ; au contraire dans la théorie nouvelle la pression du fluide qui remplit les diélectriques a une valeur toute différente.

Il ne faut pas attribuer à cette contradiction trop d'importance. J'ai exposé plus haut en effet les raisons qui me font penser que Maxwell ne regardait la théorie du déplacement électrique ou du fluide inducteur que comme provisoire, et que ce fluide inducteur auquel il conservait le nom d'électricité, n'avait pas à ses yeux plus de réalité objective que les deux fluides de Coulomb.

83. Malheureusement il y a une difficulté plus grave. Pour Maxwell, et c'est un point auquel il tenait évidemment

beaucoup, l'énergie potentielle,

$$W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

est localisée dans les divers éléments de volume du diélectrique, de telle façon que l'énergie contenue dans l'élément $d\tau$ a pour valeur

$$\frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

ou, en supposant $K = 1$, pour simplifier, et appelant F la force électromotrice :

$$\frac{F^2 d\tau}{8\pi}$$

Si donc F subit un accroissement très petit dF, cette énergie devra subir un accroissement égal à :

$$dW = \frac{2FdF}{8\pi}\, d\tau.$$

Nous prendrons comme élément de volume $d\tau$ un parallèlipipède rectangle infiniment petit dont une arête sera parallèle à la force électromotrice F et dont les trois arêtes auront pour longueurs α, β et γ, de telle sorte que

$$\alpha\beta\gamma = d\tau.$$

Cherchons une autre expression de cette énergie.

Il est naturel de supposer que l'accroissement dW de l'énergie localisée dans cet élément $d\tau$ est due au travail des pressions qui agissent sur les faces de ce parallèlipipède. Les

arêtes du parallèlipipède qui, lorsque les pressions sont nulles ont pour longueurs α, β, γ, prennent sous l'influence de ces pressions des longueurs

$$\alpha(1+\varepsilon_1), \qquad \beta(1+\varepsilon_2), \qquad \gamma(1+\varepsilon_3).$$

Si nous supposons que ces quantités ε_1, ε_2, ε_3, prennent des accroissements $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$, les travaux des pressions P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, sur les diverses faces du parallélipipède seront

$$\frac{F^2}{8\pi}\beta\gamma\,\alpha d\varepsilon_1 = \frac{F^2}{8\pi}d\tau\, d\varepsilon_1,$$

$$-\frac{F^2}{8\pi}\gamma\alpha\,\beta d\varepsilon_2 = -\frac{F^2}{8\pi}d\tau\, d\varepsilon_2,$$

$$-\frac{F^2}{8\pi}\alpha\beta\,\gamma d\varepsilon_3 = -\frac{F^2}{8\pi}d\tau\, d\varepsilon_3.$$

La somme de ces travaux est

$$\frac{F^2}{8\pi}d\tau\,(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3).$$

Si nous attribuons l'énergie potentielle aux travaux des pressions, nous devons avoir égalité entre ces travaux et la variation dW de l'énergie, c'est-à-dire

$$\frac{F^2}{8\pi}d\tau\,(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3) = \frac{2FdF}{8\pi}d\tau,$$

ou,

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 = \frac{2dF}{F}.$$

En intégrant nous obtenons

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2\log F + \text{const.}$$

Ce résultat est inadmissible, car dans l'état d'équilibre, nous

avons $F = o$ et l'égalité précédente ne pourrait alors avoir lieu que si ε_2 ou ε_3 devenait infini, conséquence évidemment absurde.

84. La théorie du § 77 est donc incompatible avec l'hypothèse fondamentale de la localisation de l'énergie dans le diélectrique, si l'on regarde cette énergie comme potentielle. Il n'en serait plus de même si l'on regardait cette énergie comme cinétique, c'est-à-dire si l'on supposait que le diélectrique est le siège de mouvements tourbillonnaires et que W représente la force vive due à ces mouvements. Mais on ne peut encore adopter cette interprétation de la pensée de Maxwell sans se heurter à de grandes difficultés.

Lorsque le savant anglais applique les équations de Lagrange à la théorie des phénomènes électrodynamiques, il suppose expressément, comme nous le verrons plus loin, que l'énergie électrostatique

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

est de l'énergie potentielle et que l'énergie électrodynamique est au contraire cinétique

Aussi réserve-t-il l'explication par les mouvements tourbillonnaires pour les attractions magnétiques et électrodynamiques et ne cherche-t-il pas à l'appliquer aux phénomènes électrostatiques.

J'arrête ici cette longue discussion qui me semble avoir prouvé que la théorie précédente, parfaitement acceptable en elle-même ne rentre pas dans le cadre général des idées de Maxwell.

CHAPITRE V

ÉLECTROKINÉTIQUE

85. Conducteurs linéaires. — La propagation de l'électricité, en régime permanent dans les conducteurs linéaires est réglée par deux lois : la *loi de Ohm* et celle de *Kirchhoff*.

D'après la première, la force électromotrice qui agit entre les extrémités d'un conducteur est proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse l'unité de section de ce conducteur pendant l'unité de temps. Dans le cas où la section du conducteur est partout la même, comme dans un fil cylindrique, la force électromotrice est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe à travers cette section pendant l'unité de temps. Cette quantité est appelée *l'intensité* du courant qui parcourt le conducteur ; nous la désignerons par i. Si le conducteur est homogène et si aucun de ses points n'est le siège de forces électromotrices, la force électromotrice entre ses extrémités est égale à la différence $\psi_1 - \psi_2$ des valeurs du potentiel en ces points et la loi de Ohm conduit à la relation

$$Ri = \psi_1 - \psi_2.$$

Mais dans le cas le plus général il existe en différents points du conducteur des forces électromotrices qui sont dues soit à un défaut d'homogénéité, soit à des phénomènes calorifiques ou chimiques, soit enfin à des effets d'induction. En désignant par ΣE la somme des forces électromotrices de cette nature qui existent en divers points du conducteur linéaire, nous avons alors

$$(1) \qquad Ri = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Dans ces deux formules R est ce qu'on appelle la *résistance* du conducteur. Cette résistance est liée à la longueur l et à la section $d\omega$ du conducteur par la relation

$$(2) \qquad R = \frac{l}{C d\omega},$$

où C est un facteur ne dépendant que de la nature du conducteur et qu'on nomme *coefficient de conductibilité spécifique.*



La loi de Kirchhoff n'est autre que l'application du principe de continuité. D'après cette loi, si plusieurs conducteurs linéaires aboutissent en un même point de l'espace, la somme des intensités des courants qui les traversent est nulle.

86. Nouvelle expression analytique de la loi de Ohm. — Si nous portons dans la formule (1) la valeur de la résistance donnée par la relation (2) nous obtenons

$$\frac{l}{C}\frac{i}{d\omega} = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Considérons un élément infiniment petit de longueur dx du conducteur. Appelons $-d\psi$ la différence des potentiels

entre deux extrémités quand on se déplace dans le sens du flux d'électricité, et Xdx la variation des forces électromotrices de toute autre nature. L'équation précédente devient alors

$$\frac{idx}{Cd\omega} = -d\psi + Xdx$$

ou

$$\frac{i}{Cd\omega} = -\frac{d\psi}{dx} + X.$$

Mais puisque i est la quantité d'électricité qui traverse pendant l'unité de temps la section du conducteur, le quotient $\frac{i}{d\omega}$ est la vitesse du déplacement de l'électricité ; en appelant u cette vitesse nous avons

$$(3) \qquad \frac{u}{C} = -\frac{d\psi}{dx} + X$$

équation équivalente à la loi de Ohm dans le cas d'un conducteur linéaire.

87. Conducteurs de forme quelconque. — L'analogie de la conductibilité électrique et de la conductibilité calorifique conduit à étendre la loi de Ohm aux conducteurs à trois dimensions. D'ailleurs cette extension se trouve justifiée par la concordance des conséquences théoriques et des faits expérimentaux observés dans quelques cas particuliers.

Admettons donc cette généralisation de la loi de Ohm. Si nous appelons ψ le potentiel en un point quelconque d'un élément $d\tau$ du conducteur, X, Y, Z les composantes de la force électromotrice d'origine quelconque qui s'exerce en ce

point, et enfin, u, v, w les composantes de la vitesse de l'électricité en ce point, nous aurons pour chacune des directions parallèles aux axes de coordonnées une relation analogue à la relation (3). Ces trois relations sont

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{u}{C} = -\dfrac{d\psi}{dx} + X, \\ \dfrac{v}{C} = -\dfrac{d\psi}{dy} + Y, \\ \dfrac{w}{C} = -\dfrac{d\psi}{dz} + Z. \end{cases}$$

Remarquons que u, v, w désignent les mêmes quantités qu'en électricité statique : les composantes de la vitesse de déplacement électrique. Ce sont donc encore les dérivées par rapport au temps des composantes f, g, h du déplacement de Maxwell.

Quant à la loi de Kirchhoff, il est évident qu'elle peut être étendue aux conducteurs à trois dimensions puisqu'elle n'est qu'une conséquence du principe de la continuité. Les intensités étant proportionnelles à u, v, w, cette loi conduit à la relation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Dans la théorie de Maxwell où l'électricité est supposée incompressible, cette relation, qui exprime la condition d'incompressibilité du fluide, est toujours satisfaite, que le régime permanent soit atteint ou ne le soit pas.

88. Différences entre les courants de conduction et

les courants de déplacement. — Suivant Maxwell, le fluide inducteur qui remplit un milieu diélectrique tend à se déplacer sous l'influence des forces électromotrices comme l'électricité qui remplit un milieu conducteur. Mais tandis que dans le premier cas ce déplacement s'arrête bientôt grâce à la réaction élastique du fluide inducteur, il n'en est plus ainsi dans le second, le fluide répandu à l'intérieur des milieux conducteurs ne jouissant pas de propriétés élastiques. Il en résulte que les courants de déplacement ne peuvent durer que pendant le temps très court nécessaire à l'établissement de l'équilibre. Au contraire les courants de conduction peuvent se maintenir tant qu'un agent extérieur maintient une force électromotrice entre deux points d'un conducteur. C'est là une première différence entre les courants de conduction et les courants de déplacement.

Une seconde résulte des équations qui expriment les lois auxquelles obéissent ces courants. Les équations (4) établies pour les courants de conduction, peuvent s'écrire

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= X - \frac{u}{C} \\ \frac{d\psi}{dy} &= Y - \frac{v}{C} \\ \frac{d\psi}{dz} &= Z - \frac{w}{C}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous avons montré (72) que s'il existe à l'intérieur d'un diélectrique des forces électromotrices (que nous avons supposées dues à l'induction, mais que nous pourrions supposer d'une autre nature s'il était possible d'en concevoir),

les équations des courants de déplacement doivent s'écrire

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = X - \dfrac{4\pi}{K} f, \\ \dfrac{d\psi}{dy} = Y - \dfrac{4\pi}{K} g, \\ \dfrac{d\psi}{dz} = Z - \dfrac{4\pi}{K} h. \end{cases}$$

Le rapprochement des équations (5) et (6) fait voir immédiatement que tandis que les courants de déplacement dépendent de la grandeur du déplacement, les courants de conduction dépendent de la vitesse de ce déplacement.

89. Pour bien comprendre la différence qui en résulte pour les deux courants prenons les deux exemples suivants comme termes de comparaison. En premier lieu supposons qu'on élève un corps pesant le long d'un plan incliné où le frottement est nul; on accomplit un travail qui se retrouve sous la forme d'énergie potentielle sensible. Supposons maintenant que le mouvement s'effectue sur un plan horizontal où le frottement est considérable ; quand la puissance cessera d'agir le corps restera en repos ; le travail accompli ne se retrouve plus sous forme d'énergie potentielle sensible, il se retrouve sous forme de chaleur. Dans le premier cas le travail dépend du déplacement du corps, dans le second de sa vitesse. Nous trouvons quelque chose d'analogue dans les deux espèces de courants : la production de courants de déplacement produit une variation de l'énergie potentielle du système qui dépend du carré du déplacement ; les courants de conduction donnent lieu à un dégagement de chaleur.

Une autre comparaison empruntée à l'hydrodynamique

permet également de se rendre compte de la différence qui existe entre les deux espèces de courants. Prenons une pompe P (*fig.* 10) portant deux tubes latéraux AB et FE communiquant entre eux par deux tubes verticaux BC et DE et par un tube

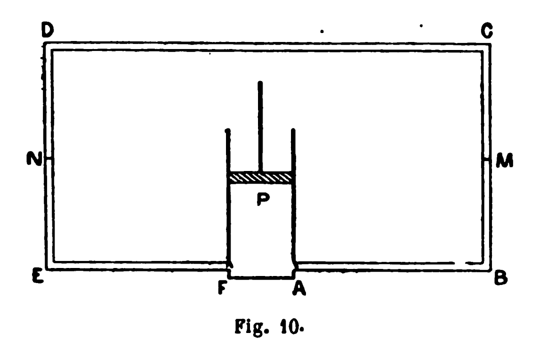


Fig. 10.

horizontal CD. Supposons cette pompe remplie de mercure, ainsi qu'une partie des tubes, et soient M et N les niveaux du mercure, situés à l'origine dans un même plan horizontal, dans les tubes verticaux. Admettons enfin, que le tube CD et les parties des tubes verticaux, non occupées par le mercure, sont remplies d'eau. Si nous faisons fonctionner la pompe, un courant liquide se produit dans l'appareil et dans un certain sens, le sens A B C D E F par exemple, et le niveau du mercure s'élève en M et s'abaisse en N, jusqu'à ce que la différence de niveau donne lieu à une pression suffisante pour empêcher le jeu de la pompe. Le travail dépensé est alors employé à produire une différence de niveau ; il se retrouve sous forme d'augmentation de l'énergie potentielle du système et cette énergie dépend de la position des niveaux du mercure. Nous avons là une image fidèle d'un courant de déplacement.

Modifions légèrement l'appareil précédent. Donnons aux

tubes une très faible section et supposons que ces tubes et la pompe soient complètement remplis de mercure. Quand on fait mouvoir la pompe, le mercure se déplace, et par suite de sa viscosité il oppose une résistance au mouvement du piston. Lorsque cette résistance est égale à la puissance qui agit sur la pompe le mercure se meut avec une vitesse constante et ce mouvement a lieu tant que dure le fonctionnement de la pompe. Le travail de la puissance se retrouve sous forme de chaleur développée par le frottement des molécules liquides et la quantité de chaleur dégagée dépend de la vitesse. Nous retrouvons dans cet exemple l'image complète d'un courant de conduction : régime variable pendant la période d'établissement, régime permanent se produisant ensuite, transformation du travail en chaleur.

90. Loi de Joule. — La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur traversé par un courant est d'après, la loi de Joule, proportionnelle au carré de l'intensité de ce courant. Dans la théorie de Maxwell le travail nécessaire pour vaincre la résistance opposée par un élément de volume $d\tau$ à la propagation de l'électricité a pour expression

$$\left(\frac{u}{C}\,df + \frac{v}{C}\,dg + \frac{w}{C}\,dh\right)d\tau\,dt,$$

df, dg, dh étant les composantes du déplacement qui a lieu pendant un intervalle de temps dt. Cette expression peut s'écrire :

$$\left(u\frac{df}{dt} + v\frac{dg}{dt} + w\frac{dh}{dt}\right)\frac{d\tau}{C}\,dt$$

ou,

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}\,d\tau\,dt.$$

Pour le conducteur tout entier, ce travail est

$$\frac{1}{C}\, dt \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau.$$

Il est proportionnel au carré de l'intensité; la quantité de chaleur qui résulte de sa transformation l'est donc aussi, comme le veut la loi de Joule.

Maxwell, dans son ouvrage consacre plusieurs chapitres intéressants à l'étude de la conduction. Nous ne le suivrons pas dans tous les développements qu'il donne sur ce sujet et nous bornerons à ce que nous venons de dire l'exposé de l'électrokinétique.

CHAPITRE VI

MAGNÉTISME

91. Fluides magnétiques. — Lois des actions magnétiques. — Rappelons les points principaux de l'étude du magnétisme.

Nous savons que dans les phénomènes magnétiques tout se passe comme s'il existait deux fluides magnétiques jouissant, comme les fluides électriques, de propriétés opposées dans leurs actions réciproques : les fluides de même espèce se repoussent, les fluides d'espèces contraires s'attirent.

Les lois de ces attractions et répulsions sont identiques à celles des actions des fluides électriques : la force qui s'exerce entre deux masses magnétiques varie en raison inverse du carré de la distance et proportionnellement aux masses agissantes. En prenant pour unité de masse magnétique celle qui, agissant sur une masse égale placée à l'unité de distance, exerce une force égale à l'unité, et convenant de donner des signes contraires aux masses magnétiques de nature différente, nous avons pour la valeur de la force s'exerçant entre

deux masses m et m' placées à une distance r,

$$f = -\frac{mm'}{r^2}$$

Dans ces conditions une force répulsive est négative ; une force attractive est positive. La formule précédente a été établie expérimentalement par Coulomb et son exactitude est confirmée par la concordance de ses conséquences avec les résultats de l'expérience.

92. Masse magnétique d'un aimant. — La seconde loi fondamentale du magnétisme est que dans un aimant quelconque la somme algébrique des masses magnétiques, définies comme on vient de le voir, est nulle. Cette loi découle du fait expérimental qu'un aimant placé dans un champ magnétique uniforme, comme celui produit par la Terre, ne prend pas de mouvement de translation. En effet, si la masse magnétique totale de l'aimant n'était pas nulle, l'aimant serait soumis à une force et non à un couple et cet aimant se déplacerait sous l'action du champ.

93. Constitution des aimants. — La rupture d'un aimant en un grand nombre de petits morceaux donne naissance à autant de petits aimants et chacun d'eux présente deux pôles de même intensité et de signes contraires. En rassemblant ensemble ces petits aimants on reproduit l'aimant primitif avec toutes ses propriétés. On peut donc admettre qu'un aimant est constitué par des petites particules contenant deux masses magnétiques égales et de signes contraires. La somme algébrique des masses de chaque particule est nulle et, par suite,

la masse totale de l'aimant tout entier est aussi nulle, comme l'exige la loi précédente. Cette hypothèse sur la constitution des aimants n'est donc pas en contradiction avec l'expérience.

94. Potentiel d'un élément d'aimant. — Composantes de l'aimantation.— Prenons une des particules élémentaires, de volume $d\tau$, qui composent un aimant et cherchons la valeur du potentiel en un point P (*fig.* 11). Soient m et $-m$ les masses magnétiques placées aux points infiniment voisins A et B de cet élément ; r_1, r_2 les distances de ces points au point P. Le potentiel en P est



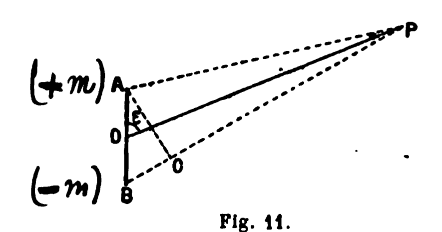


Fig. 11.

$$d\Omega = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = m\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Abaissons de A la perpendiculaire AC sur la droite BP ; $r_2 - r_1$ est, à des infiniment petits du second ordre près, égal à BC. Avec la même approximation nous avons, en appelant da la distance AB, et ε l'angle de OP avec la direction BA,

$$r_1 - r_2 = da \cos \varepsilon,$$

et aussi

$$r_1 r_2 = r^2,$$

r étant la distance du point P au point O.

Par suite, la valeur du potentiel en P est

$$(1) \qquad d\Omega = \frac{mda \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Transformons cette expression en y introduisant les composantes A, B, C de *l'aimantation* ou *magnétisation* I. Ces composantes sont définies par les relations suivantes

$$m dx = A d\tau, \qquad m dy = B d\tau, \qquad m dz = C d\tau,$$

où dx, dy, dz désignent les projections de la droite BA suivant trois axes rectangulaires.

Nous avons, si ξ, η, ζ sont les coordonnées du point P et x, y, z celles du point O,

$$\cos \varepsilon = \frac{dx}{da} \frac{\xi - x}{r} + \frac{dy}{da} \frac{\eta - y}{r} + \frac{dz}{da} \frac{\zeta - z}{r},$$

et par conséquent pour la valeur de $d\Omega$,

$$d\Omega = m \frac{da \cos \varepsilon}{r^2} = m \left(\frac{\xi - x}{r^3} dx + \frac{\eta - y}{r^3} dy + \frac{\zeta - z}{r^3} dz \right).$$

Mais le carré de la distance du point O au point P est,

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2;$$

nous en tirons

$$\xi - x = - r \frac{dr}{dx},$$

et

$$\frac{\xi - x}{r^3} = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} = \frac{d \frac{1}{r}}{dx}.$$

Nous aurons de la même manière

$$\frac{\eta - y}{r^3} = \frac{d \frac{1}{r}}{dy}, \qquad \frac{\zeta - z}{r^3} = \frac{d \frac{1}{r}}{dz}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$d\Omega = m dx \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + m dy \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + m dz \frac{d\frac{1}{r}}{dz},$$

ou en tenant compte des relations qui définissent les composantes de la magnétisation.

$$d\Omega = \left(A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\tau.$$

95. Potentiel d'un aimant. — Le potentiel d'un aimant s'obtiendra en additionnant les potentiels dus à chacun de ses éléments; il aura pour valeur

$$\Omega = \int \left(A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\tau.$$

Un aimant étant limité par une surface fermée, nous pouvons modifier cette expression. En désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à un élément $d\omega$ de la surface de l'aimant avec les axes de coordonnées nous avons en effet,

$$\int l A \frac{1}{r} d\omega = \int \frac{d}{dx} \frac{A}{r} d\tau = \int A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau + \int \frac{dA}{dx} \frac{1}{r} d\tau,$$

ou

$$\int A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau = \int l A \frac{1}{r} d\omega - \int \frac{dA}{dx} \frac{1}{r} d\tau.$$

Si nous transformons de la même manière les deux autres termes de l'intégrale qui donne Ω nous obtiendrons pour cette quantité,

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \int \frac{\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}}{r} d\tau.$$

On peut donc considérer le potentiel en un point comme résultant d'une couche de magnétisme répandue à la surface de l'aimant et de densité

$$\sigma = lA + mB + nC,$$

et d'une masse magnétique occupant tout le volume de l'aimant et de densité

$$\rho = -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right).$$

96. Remarquons que la relation de Poisson donne pour un point extérieur à l'aimant :

$$\Delta\Omega = 0,$$

et pour un point intérieur :

$$\Delta\Omega = -4\pi\rho = 4\pi\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right).$$

97. Potentiel d'un feuillet magnétique. — Supposons un aimant limité par deux surfaces infiniment voisines chargées de couches magnétiques égales et de signes contraires. Si en chaque point de la surface la magnétisation est normale à cette surface, et si le produit Ie de l'intensité de ma-

$\mathfrak{J} . e = \Phi$

gnétisation I par l'épaisseur e de l'aimant est constant, l'aimant prend le nom de *feuillet magnétique*. Le produit constant Ie s'appelle la *puissance* Φ du feuillet.

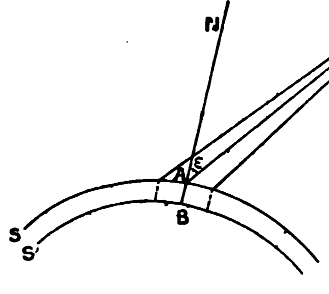


Fig. 12.

Prenons un élément A d'aire $d\omega$ sur la surface du feuillet ; la charge de cet élément est $\sigma d\omega$, σ étant la densité de la couche magnétique S au point A. La portion AB du feuillet qui correspond à cet élément de surface peut être considérée comme un aimant infiniment petit possédant des charges $\sigma d\omega$ et $-\sigma d\omega$ aux points A et B distants de e. La formule (1) du § **94** donne pour le potentiel en P de cet élément,

$$d\Omega = \sigma d\omega \frac{e \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Cette expression peut être transformée. En effet, la magnétisation étant dirigée suivant BA, on a

$$\sigma d\omega\, e = \mathrm{I} d\tau = \mathrm{I} d\omega e = \Phi d\omega,$$

Also $\mathfrak{J} = \sigma$ und $\mathfrak{J} . e =$

et par suite

$$d\Omega = \frac{\Phi\, d\omega \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Mais $\frac{d\omega \cos \varepsilon}{r^2}$ est l'angle solide $d\varphi$ sous lequel l'élément de est vu du point P; on peut donc écrire

$$d\Omega = \Phi d\varphi.$$

Pour un feuillet de dimensions finies, on aura

$$\Omega = \Phi\varphi,$$

c'est-à-dire :

Le potentiel d'un feuillet magnétique en un point extérieur est égal au produit de sa puissance par l'angle solide sous lequel le feuillet est vu du point considéré ; ce produit est pris avec le signe + ou le signe — suivant que la face vue est positive ou négative.

98. Force magnétique en un point extérieur. — Les composantes de la force qui s'exerce sur l'unité de masse magnétique positive placée en un point extérieur sont les dérivées partielles du potentiel en ce point prises en signe contraire. En les désignant par α, β, γ, nous avons

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}.$$

99. Force magnétique dans l'intérieur d'un aimant. — Nous ne pouvons connaître la force qui s'exerce sur l'unité de masse magnétique placée à l'intérieur de l'aimant sans y creuser une petite cavité permettant d'y placer un petit aimant d'épreuve ; mais l'existence de cette cavité modifie l'action de l'aimant et cette modification dépend de la forme donnée à la cavité. Pour faire le calcul de la force en un point de la cavité, il faut donc en connaître la forme.

Maxwell ne considère que deux cas particuliers dans lesquels la cavité est un cylindre très petit dont les génératrices sont parallèles à la direction de la magnétisation. Dans le premier cas la hauteur du cylindre est infiniment grande par

rapport à sa section; dans le second elle est infiniment petite.

Appelons Ω le potentiel de l'aimant tout entier en un point intérieur et Ω_1 le potentiel de la masse cylindrique enlevée pour former la cavité en ce même point. La différence $\Omega - \Omega_1$ est la valeur du potentiel de l'aimant en P quand la cavité y est creusée. La force sur l'unité de masse magnétique a alors pour composantes

$$-\frac{d\Omega}{dx}+\frac{d\Omega_1}{dx}, \quad -\frac{d\Omega}{dy}+\frac{d\Omega_1}{dy}, \quad -\frac{d\Omega}{dz}+\frac{d\Omega_1}{dz}.$$

100. Cherchons la valeur de Ω_1 quand la hauteur du cylindre est grande par rapport à la section. Ω_1 est la somme de deux intégrales, l'une étendue à la surface, l'autre au volume. Cette dernière est infiniment petite du troisième ordre et peut être négligée vis-à-vis de la première. Mais dans celle-ci les éléments correspondant aux bases du cylindre peuvent aussi être négligés, ces bases étant infiniment petites par rapport à la hauteur; il n'y a donc à tenir compte que de la surface latérale. Or, en tout point de cette surface la normale est perpendiculaire à la direction de magnétisation; par suite, la projection $lA + mB + nC$ de la magnétisation sur cette normale est nulle et les éléments de l'intégrale correspondante à la surface latérale sont encore nuls. Il en résulte donc que l'on peut alors négliger la quantité Ω_1. On a pour les composantes de la force magnétique

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz},$$

expressions identiques à celles qui donnent les composantes en un point extérieur.

101. Induction magnétique. — Passons maintenant au cas où la hauteur de la cavité cylindrique est très petite par rapport à la base. Comme précédemment, nous pouvons dans la valeur de Ω_1 négliger l'intégrale étendue au volume. Dans l'intégrale double les éléments fournis par la surface latérale sont nuls puisque la normale à chaque élément de surface est perpendiculaire à la direction de magnétisation ; il suffit donc d'étendre l'intégrale double à la surface des bases du cylindre.

Pour trouver la valeur de cette intégrale prenons pour axe des x une parallèle à la direction de magnétisation ; cet axe sera alors perpendiculaire à chacune des bases du cylindre Pour chaque élément de l'une d'elles nous aurons $l = 1, m = 0$, $n = 0$, et pour chaque élément de l'autre $l = -1$, $m = 0$, $n = 0$. Dans ce système d'axes particulier nous avons donc pour la valeur de Ω_1,

$$\Omega_1 = \int \frac{A}{r} d\omega - \int \frac{A}{r} d\omega,$$

chacune des deux intégrales étant étendue à la surface des bases. Cette valeur est la même que si l'on supposait que chaque base du cylindre est recouverte d'une couche de magnétisme ayant respectivement pour densités $+A$ et $-A$. L'étendue de ces couches étant très grande par rapport à leur distance, qui est égale à la hauteur du cylindre, l'action qu'elles exercent sur l'unité de masse magnétique placée entre elles a pour valeur $4\pi A$. Cette force est dirigée du côté de la couche négative, c'est-à-dire en sens inverse de la magnétisation.

La cavité, qui a un effet contraire à celui du cylindre aimanté de même volume, produira donc une augmentation de la

force dans la direction de la magnétisation et cette augmentation sera $4\pi A$. Par suite la composante suivant ox de la force exercée par l'aimant sur l'unité de masse placée à l'intérieur de la cavité est

$$a = -\frac{d\Omega}{dx} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A.$$

Il est évident que si au lieu de prendre le système particulier d'axes dont nous avons fait usage, nous prenons des axes quelconques nous obtiendrons pour les composantes de la force des expressions analogues à la précédente.

Ces composantes sont donc

$$\left\{\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C. \end{aligned}\right.$$

Maxwell les appelle les composantes de *l'induction magnétique à l'intérieur de l'aimant.*

102. Remarquons que la quantité

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

est une différentielle totale, puisqu'elle est égale à $-d\Omega$, tandis que la quantité

$$a dx + b dy + c dz$$

ne l'est pas.

Une autre différence entre la force magnétique et l'induction magnétique consiste dans la valeur de la somme des dérivées partielles de leurs composantes : cette somme est nulle

pour l'induction magnétique; elle ne l'est pas pour la force magnétique.

Montrons en effet que

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0.$$

On a

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}+4\pi\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right),$$

ou

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=-\Delta\Omega+4\pi\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right).$$

Or,

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=\rho,$$

et la relation de Poisson donne, pour un point intérieur,

$$\Delta\Omega=-4\pi\rho.$$

La somme considérée est donc nulle.

103. Magnétisme induit. — Certains corps placés dans un champ magnétique s'aimantent par influence. Poisson admet que les composantes de la magnétisation induite en un point d'un tel corps sont proportionnelles aux composantes de la force magnétique en ce point. Posons donc

$$A=\varkappa\alpha,\qquad B=\varkappa\beta,\qquad C=\varkappa\gamma.$$

D'après les formules précédentes, les composantes de l'in-

duction seront, au même point,

$$\left\{\begin{array}{l} a = \alpha + 4\pi A = (1 + 4\pi x)\,\alpha, \\ b = \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi x)\,\beta, \\ c = \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi x)\,\gamma. \end{array}\right.$$

En posant

$$\mu = (1 + 4\pi x),$$

ces formules deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} a = \mu\alpha \\ b = \mu\beta \\ c = \mu\gamma. \end{array}\right.$$

Maxwell appelle μ la *capacité magnétique inductive*. Cette quantité est analogue au pouvoir inducteur spécifique K de l'électrostatique; elle est plus grande que l'unité pour les corps magnétiques, égale à l'unité dans le vide, plus petite que l'unité pour les corps diamagnétiques.

104. La simplicité des formules précédentes peut faire illusion sur la difficulté de la détermination de l'induction en un point d'un corps. C'est que nous n'avons pas tenu compte de ce que x et μ ne sont pas des constantes; en second lieu nous avons supposé n'avoir en présence que des aimants permanents où la force coercitive est infinie et des aimants produits par influence dans lesquels la force coercitive est nulle.

Les corps naturels ne satisfont pas à ces conditions. La force coercitive ne peut jamais être ni rigoureusement nulle, ni rigoureusement infinie. De plus le coefficient x n'est pas une

constante. C'est une fonction de l'intensité du magnétisme $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ à laquelle on a donné le nom de *fonction magnétisante.* On n'a le droit de regarder x et μ comme des constantes que si la magnétisation est très faible.

C'est ce que nous supposerons toujours dans ce qui va suivre, et cela sera d'autant plus légitime que pour la plupart des corps μ diffère très peu de 1.

CHAPITRE VII

ÉLECTROMAGNÉTISME

105. Lois fondamentales. — Plusieurs modes d'exposition peuvent être adoptés pour trouver l'action exercée par un courant fermé sur un pôle magnétique et montrer que cette action peut être assimilée à celle d'un *feuillet magnétique* de même contour. Nous ne suivrons pas celui de Maxwell qui prend comme point de départ l'équivalence d'un courant infiniment petit et d'un aimant ; nous nous appuierons, pour arriver aux formules de Maxwell, sur trois lois démontrées par l'expérience et sur une hypothèse.

Les trois lois expérimentales sont les suivantes :

1° Deux courants parallèles de même intensité et de sens inverses exercent sur un pôle magnétique des actions égales et de signes contraires;

2° Un courant sinueux exerce une action égale à celle d'un courant rectiligne qui aurait les mêmes extrémités;

3° La force exercée par un courant sur un pôle magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui traverse une section du conducteur pendant l'unité de temps.

Les deux premières de ces lois ont été démontrées par

Ampère; la troisième a été vérifiée par de nombreuses expériences: les unes effectuées en déchargeant des batteries chargées de quantités d'électricité connues, comme dans les expériences de Colladon et de Faraday ; les autres plus précises, faites avec le voltamètre.

106. Hypothèse. — L'hypothèse que nous joindrons aux lois précédentes, est que les composantes de la force agissant sur un pôle magnétique sont les dérivées partielles d'une même fonction qui ne dépend que de la position du pôle par rapport au circuit.

Cette hypothèse paraîtra la plus naturelle si l'on songe qu'il doit y avoir conservation de l'énergie dans le système. Mais faisons observer que ce n'est pas la seule qui soit compatible avec le principe de la conservation de l'énergie ; l'hypothèse adoptée pourrait donc se trouver en défaut sans que le principe de la conservation de l'énergie cesse d'être vérifié.

D'après cette hypothèse nous pouvons poser pour les valeurs α, β, γ des composantes de la force agissant sur l'unité du pôle,

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \qquad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \qquad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}.$$

La fonction Ω est appelée le *potentiel* du circuit parcouru par le courant. Pour en trouver l'expression nous aurons recours à quelques théorèmes que nous allons établir tout d'abord. Nous négligerons d'ailleurs, pour plus de commodité, la constante d'intégration de la fonction Ω.

107. Théorème I. — *Le potentiel dû à un circuit est égal à la somme des potentiels dus aux divers circuits suivant lesquels on peut le décomposer.*

Cette propriété découle immédiatement de la loi fondamentale des actions exercées par deux courants parallèles et de sens inverses.

En effet, soit ABCD (*fig.* 13) un courant fermé ; nous pouvons le décomposer en deux circuits ABCA et ACDA parcourus dans le sens des flèches. Le circuit AC étant parcouru par deux courants de même intensité mais de sens inverse n'exerce aucune action sur un pôle magnétique ; par conséquent le potentiel du circuit total doit être égal à la somme des potentiels des deux circuits partiels ABCA et ACDA.

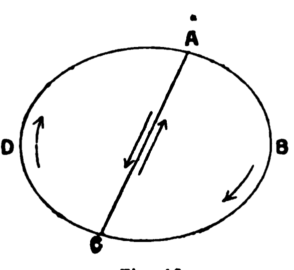


Fig. 13.

La généralisation de ce théorème à un nombre quelconque de circuits partiels est évidente.

108. Théorème II. — *Le potentiel d'un circuit fermé plan en un point extérieur situé dans son plan est nul.*

a. Supposons d'abord que le circuit possède un axe de symétrie OA (*fig.* 14), et plaçons un pôle magnétique en un point quelconque O de cet axe. Si nous faisons tourner le circuit autour de son axe de symétrie, le pôle magnétique conserve toujours la même position par rapport au circuit et, par conséquent, le potentiel en O ne

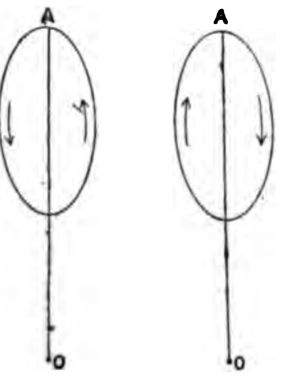


Fig. 14. Fig. 15.

varie pas. Mais quand le circuit a tourné d'un angle de 180°, il revient dans son plan primitif et le sens du courant représenté dans la position initiale par les flèches de la figure 14, est, après cette rotation, représenté par les flèches de la figure 15. Le courant a donc changé de sens par rapport au point O, et d'après la loi des courants de sens inverses, la force qui s'exerce sur le pôle a changé de sens. De ce changement dans le sens de la force résulte un changement dans le signe du potentiel Ω ; comme d'autre part ce potentiel doit conserver la même valeur il doit être nul.

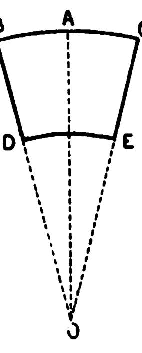


Fig. 16.

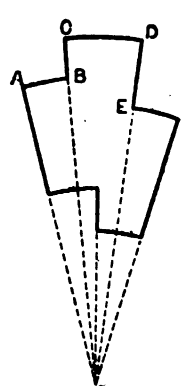


Fig. 17.

b. Si le circuit a la forme d'un rectangle curviligne BCDE (*fig.* 16), formé par les arcs de cercle BC et DE et par les portions BD et CE des rayons BO et CO le potentiel en O est nul puisque ce point appartient à l'axe de symétrie OA de la figure.

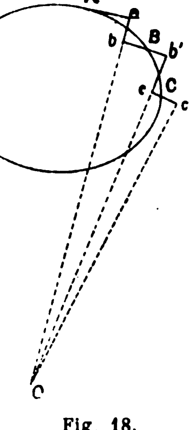


Fig. 18.

c. Quand le circuit fermé se compose d'une série d'arcs de cercles concentrique AB, CD,... (*fig.* 17), réunis par des portions rectilignes CD, DE,... passant par le centre commun O, le potentiel en ce point est évidemment nul, d'après ce qui précède et d'après le théorème I.

d. Passons enfin au cas général d'un circuit plan de forme

quelconque (*fig.* 18). Prenons sur le circuit des points très voisins A, B, C,... et par ces points faisons passer des arcs de cercle ayant pour centre un point quelconque O du plan du circuit. En menant par O un nombre égal de rayons convenablement choisis, nous pourrons former un circuit fermé A*abb'cc'*... dont les divers éléments sont très rapprochés des éléments du circuit donné. D'après le principe des courants sinueux, l'action de ces deux circuits sur un pôle magnétique est la même. Or, nous venons de voir que le potentiel en O dû au courant sinueux composé d'arcs de cercle concentriques et et de portions rectilignes dirigées vers le centre est nul. Par suite il en est de même pour un circuit de forme quelconque.

109. Théorème III. — *Quand un circuit fermé est tracé sur la surface latérale d'un cône de telle manière que chacune des génératrices du cône rencontre le circuit un nombre pair de fois, zéro pouvant être un de ces nombres, le potentiel du sommet du cône, supposé non enveloppé par le circuit, est nul.*

En effet, en traçant sur la surface du cône (*fig.* 19) des géné-

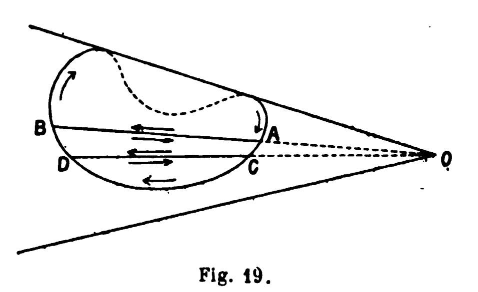


Fig. 19.

ratrices infiniment voisines, nous pouvons décomposer le circuit en éléments plans tels que ACDBA. Le point O étant situé dans le plan de chacun de ces circuits partiels le po-

tentiel en ce point dû à l'un quelconque d'entre eux est nul; la somme de ces potentiels, c'est-à-dire le potentiel dû au circuit total, est donc nulle.

110. Théorème IV. — *Quand deux circuits fermés, tracés sur la surface latérale d'un cône et coupant toutes les génératrices au moins une fois, sont parcourus par des courants de même intensité et de même sens par rapport à un observateur placé au sommet du cône le potentiel en ce point a la même valeur pour chacun des circuits.*

Soient ACE et BDF (*fig.* 20) les deux circuits parcourus par des courants dont le sens est indiqué par les flèches pla-

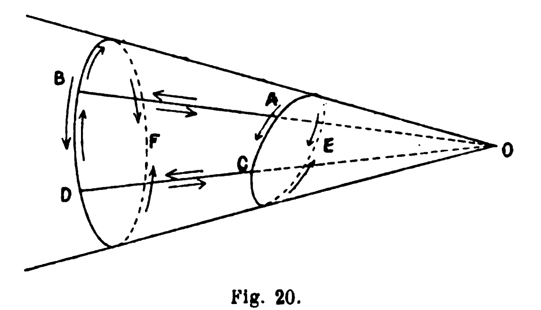


Fig. 20.

cées extérieurement. Si nous supposons ces circuits parcourus en même temps par des courants égaux en intensité mais dont le sens, indiqué par les flèches intérieures, est contraire à celui du courant réel qui les traverse, le potentiel en O dû à l'ensemble de ces quatre courants est évidemment nul. Il sera encore nul si nous ajoutons à ces courants des courants de même intensité mais de sens différents parcourant deux génératrices quelconques du cône, AB et CD. Mais l'intensité étant

la même pour tous les courants, nous pouvons considérer le système comme formé :

1° Du circuit fermé ACDB parcouru dans le sens indiqué par l'ordre des lettres ; 2° du circuit fermé ABFDCEA ; 3° du circuit BDF ; 4° du circuit AEC. Le potentiel en O dû à chacun des deux premiers circuits est nul, car chacun d'eux satisfait aux conditions du théorème précédent. Le potentiel dû à l'ensemble du troisième et du quatrième circuit est donc nul et par conséquent le potentiel résultant du circuit BDF parcouru par le courant réel est égal et de signe contraire au potentiel résultant du circuit AEC parcouru par le courant fictif de sens contraire au courant réel qui traverse ce circuit. Le potentiel du courant réel traversant le circuit ACE est égal et de signe contraire au potentiel du courant fictif qui parcourt ce même circuit en sens inverse ; il est donc égal au potentiel du courant réel qui traverse BDF.

Faisons d'ailleurs observer que les deux circuits considérés, au lieu d'être placés sur la surface d'un même cône, comme nous l'avons supposé, pourraient appartenir à deux cônes distincts mais superposables.

111. Potentiel d'un courant fermé. — Prenons un circuit fermé quelconque parcouru par un courant, et cherchons le potentiel en un point O extérieur au circuit.

Du point O comme sommet traçons un cône s'appuyant sur le contour du circuit. Ce cône découpera sur la surface de la sphère de rayon unité une surface dont la valeur φ mesure l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point O. Nous pouvons décomposer ce cône en une infinité de cônes infiniment déliés de même angle solide et supposer le circuit donné

décomposé en une infinité de petits circuits fermés tracés sur la surface de ces cônes. Ces cônes de même angle solide, étant infiniment petits, peuvent être choisis superposables et le potentiel en O est le même pour chacun des circuits tracés sur la surface de l'un d'eux. Le potentiel du circuit total est la somme de ces potentiels ; il est donc proportionnel au nombre des cônes élémentaires et, par suite, à l'angle solide φ.

Mais, d'après la troisième loi fondamentale que nous avons énoncée, l'action exercée par un courant fermé sur un pôle d'aimant est proportionnelle à l'intensité de ce courant ; par conséquent, en négligeant la constante d'intégration dans l'expression de la fonction potentielle, cette fonction doit également être proportionnelle à l'intensité du courant. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega = \varphi i,$$

l'intensité étant mesurée au moyen d'une unité telle que le coefficient de proportionnalité soit égal à 1, unité que l'on appelle *unité électro-magnétique d'intensité*.

L'action d'un circuit sur un pôle magnétique changeant de signe quand on change le sens du courant qui le traverse, le signe de φi doit dépendre du sens du courant. Appelant *face positive* du circuit celle qui se trouve à gauche d'un observateur placé sur le circuit dans le sens du courant et tourné vers l'intérieur du circuit, on convient de donner à la valeur de l'angle solide le signe + ou le signe — suivant que c'est la face positive ou la face opposée qui est vue du point considéré. En adoptant cette convention et celle qui consiste à regarder comme positive une force attractive et comme négative une force répulsive, les composantes de la force exercée par un

courant fermé sur l'unité de pôle sont données par les relations déjà écrites

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}.$$

112. Cas d'un circuit infiniment petit. — Soient AA′ (*fig.* 21) la projection d'un circuit infiniment petit et AOA′ le

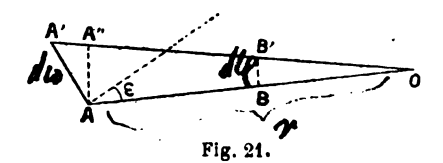


Fig. 21.

cône élémentaire d'angle solide $d\varphi$ passant par ce circuit. Le potentiel au point O a pour valeur

$$d\Omega = i d\varphi.$$

Or, $d\varphi$ étant l'aire de la section BB′ découpée par le cône sur la sphère de rayon 1, l'aire de la section AA″ découpée par ce même cône sur la sphère de rayon $OA = r$, est $r^2 d\varphi$. D'ailleurs en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on peut considérer cette aire AA″ comme la projection de l'aire $d\omega$ du circuit AA′ sur un plan perpendiculaire à OA. Nous avons donc

$$r^2 d\varphi = d\omega \cos \varepsilon,$$

et par suite

$$(1) \qquad d\Omega = \frac{i\, d\omega \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Cette expression est analogue à la formule

$$(2) \qquad d\Omega = \frac{\Phi\, d\omega \cos \varepsilon}{r^2}$$

que nous avons trouvée (**97**) pour le potentiel d'un élément de feuillet magnétique de puissance Φ. Par suite un élément de courant fermé a le même potentiel qu'un élément de feuillet de même surface et de puissance égale à l'intensité du courant.

113. Équivalence d'un courant fermé et d'un feuillet magnétique. — Les intégrales des formules (1) et (2) étendues à une même surface donneront, la première le potentiel d'un courant fermé de forme quelconque, la seconde, le potentiel d'un feuillet de même contour. Si on suppose $\Phi = i$, ces intégrales ont la même valeur, à une constante près. Par conséquent les composantes α, β, γ de la force exercée par un courant fermé sur l'unité de masse magnétique sont égales à celles de la force qu'exercerait un feuillet magnétique de même contour et dont la puissance Φ serait égale à l'intensité électromagnétique i du courant. Il y a donc équivalence dans les effets d'un courant fermé et d'un feuillet magnétique.

Il y a cependant lieu de faire remarquer que les fonctions potentielles ne jouissent pas de propriétés identiques dans les deux cas. Montrons qu'en effet le potentiel d'un aimant est une fonction uniforme, tandis que le potentiel d'un courant fermé peut prendre en chaque point de l'espace une infinité de valeurs.

La variation du potentiel d'un courant ou d'un feuillet quand on passe d'un point à un autre par un chemin quelconque est égale et de signe contraire à l'intégrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

prise le long du chemin parcouru puisque α, β, γ sont les dérivées partielles du potentiel changées de signe.

Les conditions d'intégrabilité

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}, \qquad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\gamma}{dx}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}$$

étant remplies, l'intégrale prise le long d'une courbe fermée C quelconque sera nulle ; il y a toutefois à cela une condition.

Par cette courbe C faisons passer une surface quelconque et soit A la portion de cette surface qui est limitée par la courbe fermée C. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que les forces α, β, γ et leurs dérivées premières soient finies en tous les points de l'aire A.

Mais si la courbe fermée enlace le courant, ce courant viendra certainement couper l'aire A au moins en un point et au point de rencontre, les forces magnétiques α, β, γ seront



infinies. L'intégrale prise le long d'une courbe fermée enlaçant le courant n'est donc pas nulle et la fonction Ω peut prendre en un même point deux valeurs différentes.

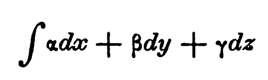
114. Travail des forces électromagnétiques suivant une courbe fermée enlaçant le circuit. — La différence entre ces deux valeurs, qui est égale à l'intégrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

prise le long de la courbe décrite C, représente le travail de la force électromagnétique dans le déplacement. Pour avoir ce travail, considérons le feuillet F (*fig.* 22) équivalent au courant. Le potentiel de ce feuillet étant une fonction uniforme



devra reprendre la même valeur quand on reviendra au point P′ après avoir parcouru la courbe fermée C. Or la variation subie par le potentiel est égale à l'intégrale



$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

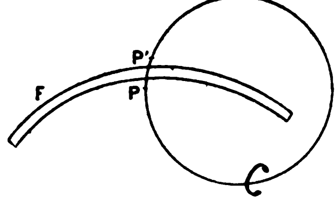


Fig. 22.

prise le long de la courbe C, plus la variation brusque que subit le potentiel quand on traverse le feuillet en allant de P′ au point infiniment voisin P. Soit H cette variation ; on aura donc :

$$H + \int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 0.$$

Il nous reste donc à calculer cette variation brusque H.

Nous avons facilement cette variation dans le cas particulier où le feuillet forme une surface fermée. En un point extérieur le potentiel est nul puisque l'angle sous lequel le feuillet est vu de ce point est nul. En un point intérieur il est $\pm 4\pi\Phi$, suivant que c'est la face positive du feuillet ou sa face négative qui est tournée vers l'intérieur de la surface fermée. La variation du potentiel quand on passe de la face négative à un point de la face positive est donc $4\pi\Phi$.

Dans le cas où le feuillet ne forme pas une surface fermée la variation du potentiel est encore la même. Soit en effet ABC (*fig.* 23) un feuillet dont nous supposerons la face positive, située du côté convexe. Au moyen d'un second feuillet ADC de même contour et de même puissance que le premier et dont la face positive est également tournée du côté convexe,

nous pouvons former un feuillet fermé ABCD. Quand on passe du point P en un point P' infiniment voisin (et situé de l'autre côté du feuillet) l'angle sous lequel on voit ce feuillet fermé augmente de 4π. Comme l'angle sous lequel est vu le feuillet ADC reste le même, l'angle solide correspondant à l'autre feuillet ABC doit augmenter de 4π. Par suite la variation du potentiel est encore $4\pi\Phi$.

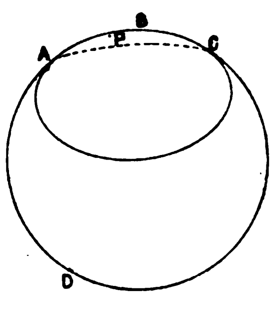


Fig. 23.

Si dans la figure 22 nous supposons que la face négative du feuillet équivalent au courant est du côté du point P, le potentiel augmentera de $4\pi i$ quand on passera de P en P' et, d'après ce que nous avons dit, le travail de la force électromagnétique sera $-4\pi i$ quand un pôle unité décrira la courbe fermée PCP'P dans le sens indiqué par l'ordre des lettres c'est-à-dire en pénétrant dans le feuillet par sa face positive. Nous pouvons donc écrire quand l'intégrale est prise le long d'une courbe fermée

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \pm 4\pi i$$

le second membre étant pris avec le signe $+$ quand le contour d'intégration enlace le circuit en pénétrant par sa face négative et avec le signe — dans le cas contraire.

Faisons observer que le contour d'intégration peut enlacer plusieurs fois le circuit ; alors le travail électromagnétique est égal à autant de fois $\pm 4\pi i$ qu'il y a d'enlacements.

115. Cas de plusieurs courants. — S'il y a plusieurs courants la force exercée sur l'unité de pôle placée en un point de l'espace est égale à la résultante des forces exercées par chacun d'eux et le travail électromagnétique, quand le pôle décrit une courbe fermée, est égal à la somme des travaux des composantes, c'est-à-dire à $\sum \pm 4\pi i$, la sommation s'étendant à tous les courants enlacés par la courbe. On a donc

$$(1) \qquad \int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \sum \pm i.$$

Cette relation peut d'ailleurs être interprétée autrement. En effet si nous considérons une surface S passant par la courbe C, tous les courants pour lesquels l'intensité est prise dans la formule (1) avec le même signe, le signe + par exemple, traversent cette surface dans le même sens ; les courants pour lesquels l'intensité est prise avec le signe — traversent au contraire la surface en sens inverse. L'intensité d'un courant étant la quantité d'électricité qui traverse une section du circuit pendant l'unité de temps, nous pouvons considérer $\sum \pm i$ comme égale à la quantité d'électricité qui traverse dans un certain sens la surface S pendant l'unité de temps. Par conséquent, le travail électromagnétique, quand on se déplace sur une courbe fermée C enlaçant plusieurs circuits, est égal au produit par 4π de la quantité d'électricité qui traverse pendant l'unité de temps une surface S limitée à la courbe C.

116. Nouvelle expression du travail électromagnétique suivant une courbe fermée. — Si nous désignons

par u, v, w, les composantes de la vitesse de l'électricité dans un des circuits, par $d\omega$ la section de ce circuit par la surface S et enfin par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément prise dans une direction convenable, nous aurons pour la quantité d'électricité qui traverse la surface S :

$$\sum i = \sum (lu + mv + nw)\, d\omega.$$

Mais nous pouvons remplacer le signe $\sum$ du second membre par le signe $\int$ et étendre l'intégration à toute la surface S, les éléments de cette surface non traversés par un courant donnant dans l'intégrale des éléments nuls. Par conséquent la formule (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad \int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \int (lu + mv + nw)\, d\omega,$$

la première intégrale étant prise le long de la courbe C, la seconde étant étendue à la surface S.

117. Transformation de l'intégrale curviligne. — Nous pouvons transformer l'intégrale curviligne du premier membre. Dans le cas où la courbe C est plane cette transformation est très facile. En effet, si nous prenons le plan de cette courbe pour plan des xy, l'intégrale considérée se réduit à

$$\int \alpha dx + \beta dy,$$

où α et β sont des fonctions continues et uniformes des coordonnées x et y. Or, on sait que dans ces conditions la valeur

de l'intégrale précédente, quand le contour d'intégration est décrit de telle sorte que l'espace illimité se trouve à gauche, est égale à celle de l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) dx\, dy$$

étendue à l'aire plane limitée par la courbe C.

Effectuons une transformation du même genre dans le cas où l'intégrale curviligne est prise le long d'un contour triangulaire ABC dont les sommets sont situés sur les axes de coordonnées (*fig.* 24). Nous pouvons obtenir la valeur de l'intégrale en prenant successivement pour contours d'intégration OAB OBC, OBA et additionnant les trois résultats obtenus, puisqu'en opérant ainsi chacune des droites OA, OB, OC est prise deux fois en sens inverses et que les côtés du triangle sont parcourus dans le sens ABC. Nous avons donc

Fig. 24.

$$\int_{ABC} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int_{OBC} (\beta dy + \gamma dz) + \int_{OCA} (\gamma dz + \alpha dx) + \int_{OAB} (\alpha dx + \beta dy)$$

ou, en transformant les intégrales curvilignes du second membre pour lesquelles le contour d'intégration est dans un

des plans de coordonnées,

$$\int_{ABC}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)=\int\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)dy\,dz$$
$$+\int\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)dz\,dx+\int\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)dxdy.$$

Supposons le tétraèdre OABC infiniment petit et désignons par $d\omega$ l'aire du triangle ABC et par l, m, n les cosinus directeurs de la normale au plan de ce triangle. Nous avons pour les projections du triangle sur les plans de coordonnées,

$$\text{OBC}=l d\omega\,,\qquad \text{OCA}=m d\omega\,,\qquad \text{OAB}=n d\omega.$$

Les intégrales du second membre de l'égalité précédente devant être étendues à l'une de ces surfaces infiniment petites, les quantités placées sous le signe d'intégration conservent très sensiblement la même valeur et peuvent être placées en dehors du signe d'intégration; nous avons donc pour la valeur de l'intégrale curviligne prise le long d'un contour triangulaire infiniment petit,

$$\int_{ABC}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)=l\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)d\omega+m\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)d\omega$$
$$+n\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)d\omega.$$

Si l'intégrale curviligne doit être prise le long d'une courbe quelconque C limitant une surface finie, nous pouvons toujours décomposer cette surface en éléments triangulaires infiniment petits et obtenir l'intégrale curviligne en faisant la somme des intégrales prises le long des contours triangulaires

limitant ces éléments; par conséquent, puisque chaque intégrale triangulaire est donnée par l'égalité précédente, nous avons pour l'intégrale curviligne prise le long du contour C,

$$\int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int \left[l \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + m \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + n \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \right] d\omega,$$

l'intégrale du second membre étant étendue à l'aire limitée par la courbe C.

118. Relations de Maxwell. — Remplaçons dans l'équation (2) l'intégrale curviligne par la valeur que nous venons de trouver, nous obtenons

$$\int \left[l \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + m \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + n \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \right] d\omega = 4\pi \int (lu + mv + nw)\, d\omega.$$

Cette égalité devant avoir lieu quelle que soit la surface d'intégration et par conséquent quels que soient l, m, n, il vient

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right),$$
$$v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right),$$
$$w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Ces formules, établies par Maxwell, lient les composantes u, v, w de l'intensité du courant aux composantes α, β, γ

de la force électromagnétique. Faisons observer qu'elles s'appliquent aux courants de déplacement aussi bien qu'aux courants de conduction, les courants de déplacement étant supposés obéir aux lois d'Ampère.

119. Action d'un pôle sur un élément de courant. — Puisque dans la théorie de Maxwell tout courant est un courant fermé, l'assimilation d'un courant fermé à un feuillet magnétique permet de déterminer l'action exercée par un système quelconque de courants sur un système d'aimants. Par l'application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction on en déduit immédiatement l'action qu'exerce un système d'aimants sur un système de courants. Le problème de la détermination des actions réciproques qui ont lieu entre les courants et les aimants se trouve donc complètement résolu. Mais nous pouvons envisager l'action exercée par un pôle d'aimant sur un courant fermé comme la résultante des actions exercées par le pôle sur les différents éléments du circuit parcouru par le courant. Nous sommes donc conduits à chercher l'expression de ces actions élémentaires.

120. Considérons le système formé par un pôle d'aimant égal à l'unité et un circuit parcouru par un courant d'intensité 1. Si φ est l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point P où se trouve placé le pôle, les composantes de la force qu'exerce le courant sur ce pôle sont



$$-\frac{d\varphi}{dx}, \quad -\frac{d\varphi}{dy}, \quad -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Les composantes de la force exercée par le pôle sur le courant étant égales et de signes contraires à ces quantités, le travail

de cette force pour un déplacement infiniment petit du circuit sera $d\varphi$, c'est-à-dire la variation de l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point P.

Cela posé prenons un circuit AMB dont un élément AB (*fig.* 25) peut se mouvoir suivant sa propre direction. Si nous donnons à AB un déplacement suivant cette direction l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point P ne varie pas. Le travail de la force électromagnétique dans ce déplacement est donc nul et par suite cette force n'a pas de composante suivant AB : *l'action élémentaire est normale à l'élément.*

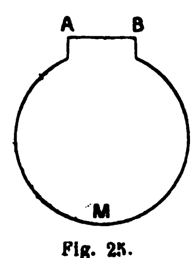


Fig. 25.

121. Pour avoir l'expression de cette force et déterminer complètement sa direction, évaluons de deux manières différentes le travail qu'elle accomplit quand l'élément AB du circuit AMB (*fig.* 26) passe de la position AB à la position AB′. Il faut supposer qu'il y a un fil métallique, dirigé suivant BB′ et son prolongement, et sur laquelle la partie mobile AB du circuit glisse en s'appuyant constamment.

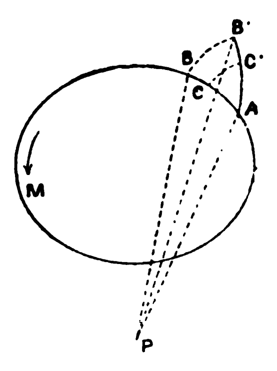


Fig. 26.

Ce travail est égal à l'angle solide $d\varphi$ sous lequel le triangle ABB′ est vu du pôle P. Les dimensions de ce triangle étant infiniment petites par rapport aux longueurs des droites PA, PB, PB′, nous pouvons regarder ces droites comme égales

entre elles ; autrement dit nous pouvons confondre la surface du triangle avec la surface découpée dans la sphère de rayon $PA = r$ par l'angle trièdre P. La surface du triangle ABB' est donc $d\varphi r^2$ et le volume du tétraèdre PABB' est

$$\frac{d\varphi\, r^3}{3}$$

Mais on peut évaluer le volume de ce tétraèdre d'une autre manière en prenant pour base le triangle PAB. Si nous désignons par P l'angle BPA sous lequel l'élément de courant est vu du point P et par h la projection de BB' sur une normale au plan PAB nous avons pour le volume du tétraèdre

$$\mathrm{P} r \frac{r}{2} \frac{h}{3},$$

et en égalant les deux expressions trouvées par ce volume,

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{\mathrm{P}}{r} \frac{h}{2}.$$

Tel est le travail de la force f qui s'exerce sur l'élément AB.

Nous en aurons une autre expression en écrivant qu'il est égal au produit de la force par la projection sur la direction de la force du chemin parcouru par le point d'application. Si nous admettons que la force est appliquée au milieu C de l'élément, le chemin décrit par le point d'application est CC', qui est la moitié de BB'. En appelant h' la projection de BB' sur la direction de la force f, le travail de cette force est

$$f \frac{h'}{2},$$

et puisqu'il est déjà donné par la relation (1) nous avons

$$fh' = \frac{P}{r} h.$$

Cette égalité est satisfaite si $h = h'$ et si $f = \frac{P}{r}$; mais $h = h'$ exprime que la force est normale au plan PAB. *Par conséquent la force exercée par un pôle d'aimant sur un élément de courant est normale au plan passant par le pôle et par l'élément.* Sa valeur pour un pôle magnétique de masse m et pour une intensité i du courant traversant l'élément est

$$f = \frac{miP}{r}.$$

Comme l'angle P dépend de r et varie en raison inverse de cette quantité, l'action élémentaire f varie en raison inverse du carré de la distance du pôle à l'élément.

CHAPITRE VIII

ÉLECTRODYNAMIQUE

122. Travail électrodynamique. — Nous admettrons que deux circuits parcourus par des courants d'intensité i et i' étant en présence, le travail des forces agissant sur l'un d'eux, lorsqu'il se déplace par rapport à l'autre, est donné par un certain potentiel T proportionnel aux intensités i et i' et ne dépendant, quand i et i' restent constants, que de la forme et de la position relative des deux circuits. Cette hypothèse se trouve vérifiée expérimentalement par les conséquences qui s'en déduisent.

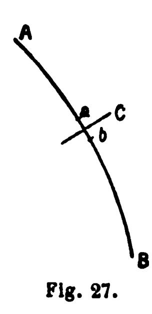


Fig. 27.

123. Solénoïdes. — Partageons une courbe AB (*fig.* 27) en une infinité d'arcs égaux ab de longueur infiniment petite δ et par les milieux de ces arcs menons les plans C normaux à la courbe. Dans chacun de ces plans traçons des courbes fermées égales, d'aire $d\omega$, et contenant le point d'intersection de leur plan avec la courbe AB. Si nous supposons chacune de ces courbes parcourues dans le même sens par des courants de même intensité i, ce système de courants porte le nom de *solénoïde*.

Chacun des courants qui composent le solénoïde est équivalent, au point de vue de l'action exercée sur un pôle d'aimant, à un feuillet magnétique de même contour et de puissance i. Si nous prenons pour épaisseur de ces feuillets la longueur δ des arcs élémentaires, les quantités de magnétisme que possède chacune de leurs faces seront $+\frac{i}{\delta}\,d\omega$ et $-\frac{i}{\delta}\,d\omega$; les faces en contact de deux feuillets consécutifs possèdent donc des masses magnétiques égales et de signes contraires et leur ensemble n'a aucune action sur un point extérieur. Par conséquent l'action du solénoïde se réduit à celles de deux masses magnétiques $+\frac{\delta}{i}\,d\omega$ et $-\frac{\delta}{i}\,d\omega$ situées aux extrémités de AB. Ce sont les *pôles* du solénoïde.

Si la courbe AB est limitée, le solénoïde a deux pôles égaux et de noms contraires ; si la courbe AB a une de ses extrémités à l'infini le pôle correspondant du solénoïde est rejeté à l'infini et l'action du solénoïde se réduit à celle de l'autre pôle ; enfin si la courbe AB est fermée le solénoïde n'a plus de pôles.

124. Solénoïdes et courants. — L'expérience montre que l'action d'un solénoïde fermé sur un courant est nulle. De ce fait expérimental il est facile de déduire que l'action d'un solénoïde ouvert ne dépend que de la position de ses pôles.

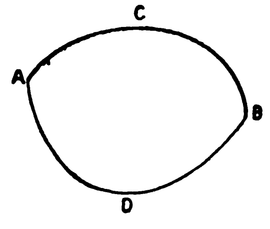


Fig. 28.

Soient T le potentiel relatif à l'action exercée par un solénoïde ACB (*fig.* 28) sur un courant se déplaçant dans son

voisinage et T' le potentiel relatif à l'action d'un second solénoïde BDA choisi de manière à former avec le premier un solénoïde fermé; nous aurons pour le potentiel de l'ensemble de ces deux solénoïdes

$$T + T' = 0.$$

Cette égalité est satisfaite tant que le solénoïde ACBDA reste fermé quelles que soient les déformations que nous fassions subir aux portions qui le composent. Si en particulier nous ne déformons que le solénoïde ACB le potentiel de BDA conserve la même valeur T' et, à cause de l'égalité précédente, T ne varie pas. Le potentiel d'un solénoïde ACB conserve donc la même valeur quand ses pôles A et B restent dans les mêmes positions; en d'autres termes le potentiel ne dépend que de la position des pôles du solénoïde.

125. Le raisonnement précédent subsiste encore lorsque l'un des pôles, B par exemple, du solénoïde ACB est rejeté à l'infini, car il suffit pour obtenir un solénoïde fermé d'y adjoindre un second solénoïde dont le pôle de nom contraire à B est également rejeté à l'infini. Mais dans ces conditions l'action du solénoïde ACB se réduit à celle du pôle A; le potentiel d'un pôle de solénoïde dépend donc uniquement de sa position par rapport aux courants qui agissent sur lui.

126. Faisons observer qu'au début de l'électromagnétisme nous avons admis que le potentiel d'un pôle magnétique soumis à l'action de courants fermés ne dépendait que de la position du pôle par rapport aux courants; et c'est sur cette seule hypothèse qu'ont reposé tous nos raisonnements. Puis-

qu'il en est de même pour le potentiel d'un pôle de solénoïde soumis à l'action de courants fermés, nous démontrerions de la même manière que dans ce nouveau cas le potentiel est encore de la même forme. Le potentiel électrodynamique d'un pôle de solénoïde sera donc proportionnel à l'angle solide φ sous lequel on voit de ce pôle les faces positives des courants qui agissent sur lui, et à la masse magnétique $\pm \frac{id\omega}{\delta}$ équivalente au pôle du solénoïde dans les actions électromagnétiques. Comme d'autre part nous avons admis (**121**) que le potentiel d'un courant qui se déplace en présence d'un autre courant d'intensité i' est proportionnel à i' nous aurons pour le potentiel d'un pôle de solénoïde soumis à l'action d'un seul courant

$$T = \pm a \frac{ii'd\omega}{\delta} \varphi.$$

Des expériences précises ont montré que le coefficient a est égal à l'unité quand les intensités sont exprimées en unités électromagnétiques ; nous avons donc

$$T = \pm \frac{id\omega}{\delta} i'\varphi,$$

c'est-à-dire que l'action électrodynamique qui s'exerce entre un pôle de solénoïde et un courant est égale à l'action électromagnétique qui a lieu entre ce courant et une masse magnétique $\pm \frac{id\omega}{\delta}$ dont le signe est déterminé par le sens du courant dans le pôle solénoïdal.

127. Lorsque le solénoïde a deux pôles A et B (*fig.* 29) on peut, sans changer son action, lui ajouter un solénoïde BC

s'étendant à l'infini dans une direction C et parcouru par deux courants de sens inverses d'intensité égale à celle du courant qui parcourt AB. L'ensemble de ces trois solénoïdes peut être considéré comme deux solénoïdes infinis dont l'un a son pôle en A, l'autre, son pôle en B et dans lesquels circulent des courants de même intensité et de sens contraires. Ces deux pôles équivalent à deux masses magnétiques égales et de signes contraires de sorte que le solénoïde fini AB est assimilable à un aimant uniforme de même longueur.

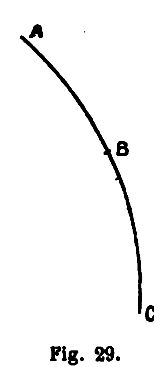


Fig. 29.

128. Potentiel électrodynamique d'un courant infiniment petit. — Un courant infiniment petit peut être considéré comme un élément de solénoïde de longueur δ. Si donc sa surface est $d\omega$ et son intensité i, il peut être assimilé à deux masses magnétiques $+\frac{id\omega}{\delta}$ et $-\frac{id\omega}{\delta}$ placées en A et B à une distance δ l'une de l'autre.

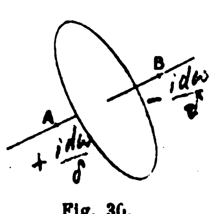


Fig. 30.

Appelons Ω le potentiel de l'action qu'exerce le système des courants fixes sur l'unité de magnétisme positif placée au point A (*fig.* 30). Au point B, infiniment voisin de A le potentiel sera $\Omega + d\Omega$. Par conséquent le potentiel des deux masses magnétiques qui remplacent le courant infiniment petit a pour expression

$$\Omega \frac{id\omega}{\delta} - (\Omega + d\Omega) \frac{id\omega}{\delta} = - d\Omega \frac{id\omega}{\delta}.$$

En désignant par x, y, z les coordonnées du point A, il vient

$$d\Omega = \frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy + \frac{d\Omega}{dz}dz$$

ou encore

$$d\Omega = -(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

α, β, γ étant les composantes de la force qu'exerce le système de courants fixes sur l'unité de pôle magnétique situé en A.

Si nous appelons l, m, n les cosinus directeurs de la direction AB de la normale au plan du courant infiniment petit, les quantités dx, dy, dz ont pour valeurs

$$dx = l\delta, \qquad dy = m\delta, \qquad dz = n\delta,$$

et l'expression de $d\Omega$ peut se mettre sous la forme

$$d\Omega = -(\alpha l + \beta m + \gamma n)\delta.$$

On a alors pour le potentiel du courant infiniment petit,

$$\mathcal{P} = \quad -d\Omega\frac{id\omega}{\delta} = i(\alpha l + \beta m + \gamma n)\,d\omega,$$

c'est-à-dire que *le potentiel d'un courant élémentaire est égal au produit de son intensité par le flux de force qui pénètre par sa face positive.*

129. Potentiel électrodynamique d'un courant fermé. — Dans le cas où l'on a un système de courants fixes agissant sur un courant fini mobile on peut décomposer le courant mobile en une infinité de courants élémentaires de

même intensité et circulant dans le même sens. Le potentiel du courant ainsi décomposé est égal à la somme des potentiels des courants élémentaires ; il est donc

$$(1) \qquad T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n)\, d\omega$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface d'une aire courbe ou plane quelconque limitée par le courant mobile.

130. Autre expression du potentiel d'un courant. — L'intégrale précédente étendue à une surface peut être remplacée par une intégrale curviligne prise le long du circuit traversé par le courant. C'est la transformation inverse à celle que nous avons employée au § 117. En se reportant à ce que nous avons dit à cet endroit il est facile de voir que l'intégrale

$$(2) \qquad T = i \int_C (F dx + G dy + H dz)$$

prise le long du circuit mobile est égale à

$$i \int\int \left[l \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + m \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + n \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right) \right] d\omega$$

étendue à une surface limitée par le même circuit. Si donc on veut que l'intégrale (2) représente le potentiel, donné par l'intégrale (1), d'un courant fermé, il faut qu'on ait

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz} \\ \beta = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx} \\ \gamma = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy}. \end{cases}$$

Les quantités F, G, H ainsi introduites sont appelées par Maxwell *les composantes du moment électro-magnétique* (le mot *moment* est pris dans le sens de *quantité de mouvement*).

131. Cas d'un courant se déplaçant dans un milieu magnétique. — Jusqu'ici nous avons implicitement supposé que s'il existe des aimants en présence du courant mobile, celui-ci ne les traverse pas. Examinons le cas où le courant mobile se déplace dans un milieu magnétique.

Il peut y avoir indécision sur le choix des quantités à prendre pour les composantes α, β, γ de la force qui s'exerce sur l'unité de pôle. Nous avons vu, en effet, à propos des aimants, que la force qui agit sur un pôle placé à l'intérieur d'une cavité creusée dans un milieu magnétique dépendait de la forme de la cavité, et parmi les valeurs qu'elle peut prendre nous en avons considéré deux : l'une (*la force magnétique*) ayant pour composantes

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \qquad \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \qquad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz};$$

l'autre (*l'induction magnétique*) de composantes

$$a = \alpha + 4\pi A, \qquad b = \beta + 4\pi B, \qquad c = \gamma + 4\pi C$$

Ω désignant le potentiel de l'aimant et A, B, C les composantes de la magnétisation au point considéré.

Mais la forme des équations (3) permet de lever facilement l'indétermination et montre qu'il faut y introduire les composantes de l'induction magnétique. En effet, en prenant les dérivées des deux membres de chacune d'elles respectivement

par rapport à x, y, z, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

Or nous avons vu que cette condition n'est pas satisfaite par les composantes de la force magnétique dans le cas d'un point intérieur aux masses magnétiques tandis qu'elle l'est toujours pour les composantes de l'induction. C'est donc ces dernières qu'il faut introduire dans les formules ; celles-ci deviennent

$$(4)\quad\begin{cases} a=\dfrac{dH}{dy}-\dfrac{dG}{dz} \\ b=\dfrac{dF}{dz}-\dfrac{dH}{dx} \\ c=\dfrac{dG}{dx}-\dfrac{dF}{dy}. \end{cases}$$

132. Une indétermination du même genre a lieu pour les formules du § 118 qui donnent les composantes u, v, w de la vitesse d'un courant en fonction de α, β, γ, mais il est facile de la lever en montrant que dans ce cas on ne doit pas prendre les composantes de l'induction.

En effet, plaçons-nous dans le cas particulier où le circuit mobile n'est traversé par aucun courant ; nous aurons alors $u=v=w=0$. Si donc on prenait les composantes de l'induction il viendrait

$$\frac{dc}{dy}-\frac{db}{dz}=0,\qquad \frac{da}{dz}-\frac{dc}{dx}=0,\qquad \frac{db}{dx}-\frac{da}{dy}=0,$$

conditions qui ne sont pas satisfaites en général. Nous ne pouvons donc prendre les composantes de l'induction et nous

devons conserver les composantes α, β, γ de la force magnétique. Nous nous contenterons de ce double aperçu, en l'absence d'une théorie plus satisfaisante.

133. Détermination des composantes du moment électromagnétique. — Abandonnons le cas où le courant mobile se meut dans un milieu magnétique et cherchons les composantes F, G, H du moment magnétique.

Les trois équations différentielles (3) ne suffisent pas pour déterminer ces quantités car il est facile de voir que si F, G, H est une solution de ces équations, le groupe de valeurs

$$F+\frac{d\chi}{dx}, \qquad G+\frac{d\chi}{dy}, \qquad H+\frac{d\chi}{dz}$$

où χ est une fonction quelconque des coordonnées est également une solution du système. En effet, le second membre de la première des équations devient quand on substitue à F, G, H les valeurs précédentes,

$$\frac{d}{dy}\left(H+\frac{d\chi}{dz}\right)-\frac{d}{dz}\left(G+\frac{d\chi}{dy}\right)=\frac{dH}{dy}+\frac{d^2\chi}{dydz}-\frac{dG}{dz}-\frac{d^2\chi}{dydz}$$
$$=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},$$

et le dernier membre de cette suite d'égalités est égal à α puis que, par hypothèse, F, G, H forment une solution du système. On verrait par un calcul semblable que les deux autres équations sont également satisfaites.

134. Pour déterminer les composantes F, G, H nous devons donc leur imposer la condition de satisfaire à une nouvelle

équation. Maxwell prend pour cette équation de condition,

$$(5) \qquad J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

En tenant compte de cette relation il est possible de trouver entre les composantes u, v, w de la vitesse du courant et les composantes F, G, H du moment magnétique trois relations qui nous permettront d'obtenir les valeurs de ces dernières quantités. Nous avons, d'après les formules du § 118 et les formules (3) du § 130.

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2G}{dxdy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dxdz},$$

ou, en ajoutant et retranchant au second membre la quantité $\frac{d^2F}{dx^2}$ et groupant les termes d'une manière convenable

$$4\pi u = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2G}{dxdy} + \frac{d^2H}{dxdz} - \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2}$$

ou enfin

$$(6) \qquad 4\pi u = \frac{dJ}{dx} - \Delta F.$$

Si on suppose que l'équation (5) est toujours satisfaite, c'est-à-dire qu'elle est une identité, les dérivées partielles de J sont nulles et la relation (6) se réduit à

$$\Delta F + 4\pi u = 0.$$

Cette équation étant analogue à l'équation de Poisson, F peut être considéré comme le potentiel d'une matière attirante de densité u. D'après ce que nous savons sur la forme

du potentiel qui satisfait à une telle équation nous pouvons poser immédiatement

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace tout entier ; u est la valeur de la première composante du courant au centre de gravité de l'élément $d\tau$ et r est la distance de cet élément au point x, y, z.

Nous obtiendrons par des calculs analogues

$$G = \int \frac{v}{r} d\tau, \qquad H = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

Ces valeurs de F, G, H satisfont nécessairement aux équations différentielles (3) ; montrons que l'équation de condition (5) est également satisfaite et pour cela cherchons les dérivées partielles de F, G, H qui y entrent.

135. Donnons à un point de coordonnées x, y, z un déplacement parallèle à l'axe des x et de grandeur dx ; la distance de ce point aux différents éléments de la matière attirante fictive de densité u croît de dr et le potentiel F au point considéré augmente de $\frac{dF}{dx}\,dx$. Mais supposons qu'au lieu de déplacer le point attiré x, y, z, comme nous venons de le faire en laissant fixe la matière attirante, nous donnions aux divers points de la matière attirante un déplacement égal à $-dx$, en laissant fixe le point x, y, z, cela reviendra absolument au même. L'accroissement dr de la distance du point attiré au point attirant sera évidemment le même, si l'on donne au point

attiré un déplacement quelconque, ou si c'est le point attiré qui subit un déplacement parallèle égal et de sens contraire. Cela revient à supposer que la densité u au centre de gravité de l'élément devient après le déplacement, $u + \frac{du}{dx} dx$. Nous avons donc

$$\frac{dF}{dx} dx = \int \frac{u + \frac{du}{dx} dx}{r} d\tau - \int \frac{u}{r} d\tau,$$

la première intégrale étant étendue à tout le volume occupé par la matière attirante après le déplacement, la seconde au volume occupé avant le déplacement. Or ces deux champs d'intégration sont les mêmes puisque tous deux comprennent l'espace tout entier ; par conséquent, nous avons simplement

$$\frac{dF}{dx} dx = \int \frac{\frac{du}{dx} dx}{r} d\tau,$$

d'où

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{1}{r} \frac{du}{dx} d\tau.$$

Nous obtiendrions des expressions analogues pour les différentielles partielles de G par rapport à y et de H par rapport à z ; leur addition donne

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \int \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau.$$

Tous les éléments de cette dernière intégrale sont nuls puisque, pour Maxwell, l'électricité est incompressible et

que l'équation qui exprime cette incompressibilité est

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

L'équation de condition (5) est donc satisfaite.

136. Revenons au cas où le milieu étant magnétique, les composantes F, G, H du moment électromagnétique sont liées à celles de l'induction par les équations (4). Il est facile de s'assurer que ces équations et l'équation de condition (5) seront satisfaites si l'on prend pour F, G, H le produit des valeurs trouvées par le coefficient de perméabilité magnétique μ du milieu ; nous avons donc

$$F=\mu\int\frac{u}{r}\,d\tau,\qquad G=\mu\int\frac{v}{r}\,d\tau,\qquad H=\mu\int\frac{w}{r}\,d\tau.$$

137. Valeurs de F, G, H pour un courant linéaire. — Plaçons-nous dans le cas particulier où en présence du courant mobile il n'y a qu'un seul courant dont le circuit est formé par un fil de faible section $d\sigma$. L'intensité de ce dernier courant étant désignée par i, la vitesse de l'électricité est $\frac{i}{d\sigma}$ et la direction de cette vitesse est celle de la tangente au circuit menée dans le sens du courant. Les cosinus directeurs de cette tangente sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ (en appelant ds l'élément d'arc du circuit), de sorte que l'on a pour les composantes u, v, w de la vitesse de l'électricité

$$u=\frac{i}{d\sigma}\frac{dx}{ds},\qquad v=\frac{i}{d\sigma}\frac{dy}{ds},\qquad w=\frac{i}{d\sigma}\frac{dz}{ds}$$

ou, puisque $d\sigma ds = d\tau$,

$$(7) \quad u = \frac{idx}{d\tau}, \qquad v = \frac{idy}{d\tau}, \qquad w = \frac{idz}{d\tau}.$$

Par conséquent la composante F du moment magnétique en un point de l'espace peut s'écrire

$$F = \int \frac{u}{r}\, d\tau = \int \frac{idx}{r} = i \int \frac{dx}{r}$$

et nous avons pour les trois composantes

$$(8) \quad F = i \int \frac{dx}{r}, \qquad G = i \int \frac{dy}{r}, \qquad H = i \int \frac{dz}{r}.$$

138. Formule de Neumann. — Soit C (*fig.* 31) un circuit fixe parcouru par un courant d'intensité i, et C' un circuit mobile parcouru par un courant d'intensité i'. Le potentiel électrodynamique T du courant C' par rapport au courant C a pour valeur,

$$T = i' \int_{C'} (F dx' + G dy' + H dz').$$

Dans cette expression F, G, H sont relatives au circuit C puisque ce circuit est seul en présence du circuit mobile ; si donc nous supposons que ce circuit est formé d'un fil de faible section, F, G, H sont données par les expressions (8) trouvées précédemment et dans lesquelles r est la distance du milieu de l'élément ds au milieu de l'élément ds'. En portant

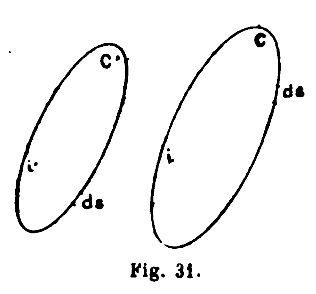


Fig. 31.

ces valeurs dans l'expression de T nous obtenons

$$T = ii' \int\int \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r},$$

et, en appelant ε l'angle des deux éléments ds et ds',

$$(9) \qquad T = ii' \int\int \frac{ds\,ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

Telle est la forme donnée par Neumann au potentiel électrodynamique d'un courant par rapport à un autre.

La symétrie de cette formule par rapport à i et i', à ds et ds' montre que le potentiel électrodynamique de C′ par rapport à C est égal au potentiel électrodynamique de C par rapport à C′.

139. Nouvelle expression du potentiel électrodynamique d'un courant. — La formule

$$T = i\int(F\,dx + G\,dy + H\,dz)$$

peut facilement se mettre sous une autre forme qui nous sera utile dans ce qui va suivre.

Des valeurs (7) établies au § 137 on tire immédiatement

$$i\,dx = u\,d\tau, \qquad i\,dy = v\,d\tau, \qquad i\,dz = w\,d\tau,$$

et en portant ces valeurs dans l'expression de T, il vient

$$(10) \qquad T = \int(Fu + Gv + Hw)\,d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à l'espace occupé par la matière conductrice qui constitue le circuit mobile.



140. Potentiel électrodynamique d'un courant par rapport à lui-même. — On peut par la pensée décomposer un circuit traversé par un courant en une infinité de circuits de section infiniment petite. Chacun des courants ainsi obtenus possède par rapport aux autres un potentiel électrodynamique ; la somme de ces potentiels est ce qu'on appelle le potentiel du courant par rapport à lui-même. Cherchons l'expression de ce potentiel.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse de l'électricité en un point du circuit, F, G, H les composantes du moment électromagnétique en ce même point, et T le potentiel du courant par rapport à lui-même. Si nous donnons à, u, v, w, les accroissements du, dv, dw, ces quantités F, G, H, et T prendront respectivement les accroissements dF, dG, dH et dT. Le courant qui circule alors dans le circuit peut être considéré comme résultant de la superposition du courant primitif et du courant provenant de l'accroissement donné à la vitesse de l'électricité ; nous appellerons ce dernier. courant supplémentaire. L'accroissement dT du potentiel peut donc être regardé comme égal à la somme du potentiel du courant ancien par rapport au courant supplémentaire et du potentiel du courant supplémentaire par rapport à lui-même. Le potentiel du courant primitif par rapport au courant supplémentaire est, d'après l'expression (10) du potentiel d'un courant

$$\int (u d\mathrm{F} + v d\mathrm{G} + w d\mathrm{H})\, d\tau.$$

Quant au potentiel du courant supplémentaire par rapport à lui-même ce sera une quantité infiniment petite du second

ordre et on pourra le négliger ; on a donc

$$dT = \int (udF + vdG + wdH)\, d\tau.$$

Mais on peut considérer dT comme étant égal au potentiel du courant supplémentaire par rapport au courant primitif augmenté du potentiel du courant supplémentaire par rapport à lui-même. En négligeant ce dernier, il vient

$$dT = \int (Fdu + Gdv + Hdw)\, d\tau,$$

et en additionnant les deux valeurs de dT puis divisant par 2,

$$dT = \frac{1}{2}\int (Fdu + udF + Gdv + vdG + Hdw + wdH)\, d\tau.$$

ou

$$dT = \frac{1}{2}\, d\int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau,$$

L'intégration donne pour la valeur du potentiel du courant par rapport à lui-même

$$(11) \qquad T = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau.$$

141. Remarquons que le raisonnement qui nous a conduit à cette expression s'applique tout aussi bien au cas d'un système de plusieurs courants qu'à celui d'un courant unique. Cette expression représente donc d'une manière générale le potentiel électrodynamique d'un système de courants par rapport à lui-même. Il faut alors étendre l'intégration à tout le volume occupé par les conducteurs matériels du système, ou bien encore à l'espace tout entier, ce qui revient au même

puisque le système est supposé n'être en présence d'aucun autre système de courants.

142. Expressions diverses du potentiel d'un système de courants par rapport à lui-même. — Nous avons établi au § 134 que la composante F du moment électromagnétique en un point de l'espace est donnée par la formule

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

r étant la distance du point considéré à l'élément de volume $d\tau'$ pour lequel la composante de la vitesse est u'. Au point de l'espace occupé par un élément de volume $d\tau$ d'un système de courants les composantes du moment électromagnétique relatif au système lui-même seront donc

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}, \qquad G = \int \frac{v' d\tau'}{r}, \qquad H = \int \frac{w' d\tau'}{r}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression (10) du potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même il vient

$$T = \frac{1}{2} \int \left(u \int \frac{u' d\tau'}{r} + v \int \frac{v' d\tau'}{r} + w \int \frac{w' d\tau'}{r} \right) d\tau.$$

Chacune des intégrales doubles du second membre de cette égalité doit être étendue à toutes les combinaisons possibles de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$. Ces éléments appartenant au même système de courants, un même élément de volume joue le rôle de $d\tau$ et de $d\tau'$ et chaque intégrale contient deux fois le même élément différentiel. Si l'on ne prend qu'une

seule fois chaque élément différentiel il faut, dans l'égalité précédente, porter le double du résultat obtenu par l'intégration ainsi conduite. Le facteur $\frac{1}{2}$ disparaît donc et on a la formule

$$(12) \qquad T = \int\int \frac{uu' + vv' + ww'}{r} \, d\tau \, d\tau'.$$

143. Dans l'expression (11) du travail électrodynamique, nous pouvons remplacer u, v, w par leurs valeurs :

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right),$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right),$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right);$$

p. 133

nous obtenons

$$T = \frac{1}{8\pi}\int\left[F\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + G\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + H\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\right] d\tau.$$

Considérons l'intégrale

$$\int F \frac{d\gamma}{dy} \, d\tau;$$

en intégrant par parties, il vient

$$\int\int\int F \frac{d\gamma}{dy} \, d\tau = \int\int F\gamma m \, d\omega - \int\int\int \gamma \frac{dF}{dy} \, d\tau,$$

m étant le cosinus de l'axe des y avec la normale à l'élément

$d\omega$ de la surface qui limite le volume d'intégration. Si, comme nous en avons le droit, nous étendons les intégrales triples à l'espace tout entier, les composantes α, β, γ, de la force qui s'exerce sur un point de la surface limitant le volume sont nulles, puisque le point est rejeté à l'infini. Les éléments de l'intégrale double sont donc nuls et l'intégrale elle-même est égale à zéro. Nous avons donc simplement

$$\int \mathrm{F}\frac{d\gamma}{dy}\,d\tau = -\int \gamma\frac{d\mathrm{F}}{dy}\,d\tau.$$

En effectuant une transformation analogue pour les autres intégrales de l'expression précédente de T et portant les valeurs obtenues dans cette expression, on obtient

$$(13)\quad \mathrm{T}=\frac{1}{8\pi}\int\left[\alpha\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}-\frac{d\mathrm{G}}{dz}\right)+\beta\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}-\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx}-\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)\right]d\tau.$$

144. Cette nouvelle forme du potentiel peut être simplifiée en tenant compte des groupes d'équation (3) et (4) qui donnent les valeurs des différences des dérivées partielles de F, G, H, dans le cas où le système de courants est dans un milieu non magnétique et dans le cas où il est au contraire dans un milieu magnétique. Nous avons dans le premier cas

$$\mathrm{T}=\frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau$$

et dans le second

$$\mathrm{T}=\frac{1}{8\pi}\int(\alpha a+\beta b+\gamma c)\,d\tau.$$

145. Cas d'un système de conducteurs linéaires. — Quand les circuits qui composent le système sont linéaires le potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même peut se mettre sous la forme qu'a donnée Neumann au potentiel de deux systèmes de courants linéaires l'un par rapport à l'autre. En effet, d'après les formules (7) et (8) établies au § 137 les composantes de la vitesse de l'électricité en un point sont

$$u = \frac{idx}{d\tau}, \qquad v = \frac{idy}{d\tau}, \qquad w = \frac{idz}{d\tau},$$

et les composantes du moment électromagnétique au même point sont

$$F = i'\int \frac{dx'}{r}, \qquad G = i'\int \frac{dy'}{r}, \qquad H = i'\int \frac{dz'}{r}.$$

En portant ces diverses valeurs dans l'expression (9) elle devient

$$T = \frac{1}{2} ii' \int\int \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r}.$$

ou, en appelant ε l'angle formé par deux éléments quelconques du système de courants,

$$T = \frac{1}{2} ii' \int\int \frac{ds\,ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

146. Cas d'un système de deux courants linéaires. —

Appelons C_1 et C_2 ces deux courants et affectons les quantités qui entrent dans nos formules des indices 1 ou 2 suivant qu'elles se rapportent au courant C_1 ou au courant C_2. Nous avons pour les composantes du moment électromagnétique en un point

$$F = i_1 \int_{C_1} \frac{dx_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dx_2}{r},$$

$$G = i_1 \int_{C_1} \frac{dy_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dy_2}{r},$$

$$H = i_1 \int_{C_1} \frac{dz_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dz_2}{r};$$

ce sont donc des fonctions linéaires et homogènes des intensités i_1 et i_2 des deux courants.

Le potentiel électrodynamique de ce système de courants par rapport à lui-même est donné par la formule (11)

$$T = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

Or, en un point du premier circuit on a

$$u d\tau = i_1 dx_1, \qquad v d\tau = i_1 dy_1, \qquad w d\tau = i_1 dz_1,$$

et en un point du second

$$u d\tau = i_2 dx_2, \qquad v d\tau = i_2 dy_2, \qquad w d\tau = i_2 dz_2.$$

Par conséquent l'intégrale (9) donne

$$T=\frac{i_1}{2}\int_{C_1}(Fdx_1+Gdy_1+Hdz_1)+\frac{i_2}{2}\int_{C_2}(Fdx_2+Gdy_2+Hdz_2).$$

T est donc une fonction linéaire et homogène par rapport à i_1 et i_2 et par rapport à F,G,H. Mais nous venons de voir que ces dernières quantités sont homogènes et du premier degré en i_1 et i_2; par conséquent T est une fonction homogène et du second degré en i_1 et i_2, et nous pouvons écrire

$$T=\frac{1}{2}(Li_1^2+2Mi_1i_2+Ni_2^2).$$

Les quantités L, M, N ne dépendent évidemment que de la forme et de la position relative des deux courants C_1 et C_2. Il est d'ailleurs facile de voir leur signification. En effet M étant le coefficient de $i_1 i_2$ dans la valeur de T, M est égal à l'intégrale

$$\int\frac{dx_1\,dx_2+dy_1\,dy_2+dz_1\,dz_2}{r}$$

prise le long d'un des circuits; c'est donc le potentiel électrodynamique de l'un des courants par rapport à l'autre. On constaterait aussi simplement que L est le potentiel du courant C_1 supposé seul par rapport à lui-même et que N est le potentiel de C_2 supposé seul par rapport à lui-même.

CHAPITRE IX

INDUCTION

147. Forces électromotrices d'induction. — Dans l'étude de l'électromagnétisme et de l'électrodynamique nous avons implicitement supposé que les intensités des courants restaient constantes. Or on sait que, lorsqu'il y a déplacement relatif de courants ou de courants et d'aimants, il se produit des phénomènes particuliers connus sous le nom de *phénomènes d'induction* et dont la découverte est due à Faraday. Ces phénomènes se manifestent dans les circuits par la production de courants temporaires dont les intensités s'ajoutent à l'intensité du courant primitif et qui peuvent être attribués à des forces électromotrices que l'on nomme *forces électromotrices d'induction*.

Des expériences faites sur l'induction, il résulte que si les intensités i_1 et i_2 de deux courants fixes C_1 et C_2 subissent dans l'intervalle de temps dt des accroissements di_1 et di_2, les forces électromotrices d'induction développées dans les circuits sont, pour le circuit C_1,

$$A\frac{di_1}{dt} + B\frac{di_2}{dt}$$

et pour le circuit C_2,

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt}.$$

148. Cherchons l'expression de la force électromotrice résultant du déplacement de circuits traversés par des courants d'intensités constantes.

Prenons d'abord le cas où un seul des circuits se déplace de C en C'. L'expérience prouve que tout se passe comme si le courant C était supprimé et qu'en C' soit créé un nouveau courant de même intensité. Or, d'après ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, à une variation di de l'intensité i du courant C correspond une force électromotrice d'induction $A \frac{di}{dt}$ dans le circuit C. Par conséquent, la suppression du courant C, qui équivaut à une diminution i de l'intensité de ce courant, produit une force électromotrice $-\frac{Ai}{dt}$; et la création du courant C' une force électromotrice $(A + dA) \frac{i}{dt}$, dA étant la variation du coefficient A quand le courant passe de C en C'. Nous avons donc pour la force électromotrice résultant du déplacement

$$(A + dA) \frac{i}{dt} - A \frac{i}{dt} = i \frac{dA}{dt}.$$

Il serait facile de voir que si deux courants C_1 et C_2 sont en présence les forces électromotrices résultant de leur déplacement relatif sont, pour le circuit C_1,

$$i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt},$$

et pour le circuit C_2

$$i_1 \frac{dB}{dt} + i_2 \frac{dC}{dt}.$$

Dans le cas où les deux courants varient d'intensité en même temps qu'ils se déplacent les forces électromotrices d'induction sont, pour chacun des deux circuits, égales à la somme des forces électromotrices qui résultent de chaque genre de variation pris séparément ; on a donc pour le circuit C_1,

$$A \frac{di_1}{dt} + B \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(Ai_1 + Bi_2)$$

et pour l'autre circuit C_2,

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dB}{dt} + i_2 \frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}(Bi_1 + Ci_2).$$

149. Détermination des coefficients A, B, C. — Les cofficients qui entrent dans l'expression des forces électromotrices d'induction peuvent être déterminés par l'application du principe de la conservation de l'énergie.

Prenons deux circuits dans lesquels les courants d'intensités i_1 et i_2 sont fournis par des piles de forces électromotrices E_1 et E_2. La quantité d'énergie chimique détruite dans la pile se transforme en partie en chaleur dans la pile elle-même tandis que l'autre partie se retrouve sous forme d'énergie voltaïque. L'expérience apprend que la quantité d'énergie voltaïque produite dans le temps dt est

$$E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt.$$

Cette énergie voltaïque se retrouve sous forme de chaleur produite dans les conducteurs par le phénomène de Joule et sous forme de travail mécanique résultant du déplacement des conducteurs. Si R_1 et R_2 sont les résistances des deux circuits les quantités de chaleur dégagées sont $R_1 i_1^2\, dt$ et $R_2 i_2^2 dt$ Quant au travail mécanique fourni par le système il est égal à la variation dT du potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même, ou plus exactement à la partie de cette variation qui est due au déplacement des circuits, sans tenir compte de la partie de cette variation due à l'augmentation des intensités. Ce potentiel a pour expression dans le cas de deux circuits

$$T = \frac{1}{2}[Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2].$$

On en tire,

$$dT = \frac{1}{2}[i_1^2 dL + 2i_1i_2 dM + i_2^2 dN].$$

L'excès de l'énergie voltaïque fournie au système pendant le temps dt sur l'énergie recueillie sous forme de chaleur et de travail mécanique pendant le même temps est donc

$$(1) \quad E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt - R_1 i_1^2 dt - R_2 i_2^2 dt - dT.$$

D'après le principe de la conservation de l'énergie cette expression doit être nulle dans le cas où le système décrit un *cycle fermé*. Si le cycle n'est pas fermé, elle doit être une différentielle exacte. En exprimant que c'est une différentielle exacte nous obtiendrons les valeurs de A, B, C.

150. Pour transformer l'expression (1), écrivons les lois

d'Ohm pour chacun des circuits en observant que, puisqu'il y a déplacement des circuits il y a production de forces électromotrices d'induction ; nous avons

$$E_1 + \frac{d}{dt}(Ai_1 + Bi_2) = R_1 i_1,$$

et

$$E_2 + \frac{d}{dt}(Bi_1 + Ci_2) = R_2 i_2.$$

En multipliant les deux membres de ces relations respectivement par $i_1 dt$ et $i_2 dt$, nous obtenons

$$E_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt = -i_1 d(Ai_1 + Bi_2),$$

et

$$E_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt = -i_2 d(Bi_1 + Ci_2).$$

Si nous remplaçons les quatre premiers termes de l'expression (1) par la somme des seconds membres des relations précédentes, nous avons

$$(2) \quad -i_1 d(Ai_1 + Bi_2) - i_2 d(Bi_1 + Ci_2) - \frac{1}{2}[i_1^2 dL + 2i_1 i_2 dM + i_2^2 dN].$$

Dans le cas où il n'y aurait ni déplacement ni déformation des circuits cette expression se réduirait à

$$-Ai_1 di_1 - Bi_1 di_2 - Bi_2 di_1 - Ci_2 di_2$$

ou

$$-\frac{1}{2} d(Ai_1^2 + 2Bi_1 i_2 + Ci_2^2);$$

elle serait donc la différentielle exacte de la quantité

$$(3) \qquad -\frac{1}{2}(Ai_1^2 + 2Bi_1 i_2 + Ci_2^2).$$

Quand il y a déplacement des circuits la différentielle de cette quantité est

$$-Ai_1di_1 - Bi_1di_2 - Bi_2di_1 - Ci_2di_2 - \frac{1}{2}i_1^2dA - i_1i_2dB - \frac{1}{2}i_2^2dC$$

et pour que l'expression (2) reste la différentielle de la même quantité (3) il faut qu'il y ait identité entre cette différentielle et le développement de l'expression (2) qui est

$$-Ai_1di_1 - Bi_1di_2 - Bi_2di_1 - Ci_2di_2 - i_1^2dA - 2i_1i_2dB - i_2^2dC$$
$$- \frac{1}{2}i_1^2dL - i_1i_2dM - \frac{1}{2}i_2^2dN.$$

L'identification donne les relations

$$\frac{1}{2}dA = dA + \frac{1}{2}dL,$$
$$dB = 2dB + dM,$$
$$\frac{1}{2}dC = dC + \frac{1}{2}dN,$$

qui se réduisent à

$$dA = -dL \qquad dB = -dM \qquad dC = -dN$$

d'où l'on tire en intégrant et en supposant nulle la constante d'intégration

$$A = -L, \qquad B = -M, \qquad C = -N.$$

Ainsi les coefficients qui entrent dans l'expression des forces électromotrices d'induction sont, au signe près, les coefficients L, M, N de l'expression du potentiel électrodynamique du système de courants. Aussi appelle-t-on souvent coeffi-

cients d'induction ces derniers; L et N sont des *coefficients de self-induction* et M le *coefficient d'induction mutuelle* des deux courants.

151. Théorie de Maxwell. — La théorie de l'induction sous la forme que nous venons de lui donner, a été développée pour la première fois par Helmholtz dans son mémoire sur la *Conservation de la force* et peu de temps après par sir W. Thomson; celle de Maxwell est différente et plus complète à bien des égards. On peut en effet, par l'application des équations de Lagrange à l'étude du mouvement des molécules du fluide impondérable que Maxwell suppose présider à la manifestation des phénomènes électriques, retrouver les lois de l'Induction et celle de l'Électrodynamique.

152. Dans les chapitres qui précèdent, nous avons été amenés à conclure que les hypothèses faites par le savant anglais n'étaient que provisoires, et que, tout en nous satisfaisant mieux que l'hypothèse des deux fluides, elles n'avaient pas, même aux yeux de leur auteur, plus de réalité objective. *Au contraire nous touchons ici, à ce que je crois, à la vraie pensée de Maxwell.*

Au début de sa théorie, Maxwell fait les deux hypothèses suivantes:

1° Les coordonnées des molécules du fluide impondérable dépendent des coordonnées des molécules matérielles des corps soumis aux phénomènes électriques et aussi des coordonnées des molécules des fluides hypothétiques (électricité positive et électricité négative) de la théorie ordinaire de l'Électricité; mais nous ignorons complètement la loi de cette dépendance;

2° Le potentiel électrodynamique d'un système de courants n'est autre que la demi-force vive du fluide de Maxwell; c'est donc de l'énergie kinétique.

153. Pour introduire dans les équations de Lagrange les paramètres qui définissent la position d'une molécule du fluide de Maxwell il faut, par suite de la première hypothèse, connaître les paramètres qui définissent la position d'une molécule de nos fluides hypothétiques. Or la position d'une molécule d'électricité A qui parcourt un circuit linéaire C est parfaitement déterminée si on connaît d'une part, la position du circuit dans l'espace, et d'autre part, la longueur s de l'arc OA compté à partir d'une origine déterminée O. Par conséquent si x_1, x_2, x_3,... sont les paramètres qui définissent la position des molécules matérielles qui constituent le circuit, la position d'une molécule du fluide impondérable de Maxwell dépend des paramètres s, x_1, x_2, x_3.

Mais, au lieu de s on peut prendre une fonction de cet arc car la connaissance de cette fonction permettrait de déterminer s et par suite la position d'une molécule d'électricité sur le circuit C; Maxwell prend la quantité

$$y = \int_0^t i dt$$

qui est, ainsi que nous allons le démontrer, une fonction de s.

En effet la section du conducteur, qui peut être variable d'un point à un autre, est une fonction $\varphi(s)$ de l'arc s; la vitesse de l'électricité, quotient de l'intensité par la section du conducteur est alors $\frac{i}{\varphi(s)}$ et comme cette vitesse a aussi pour

valeur $\frac{ds}{dt}$, nous devons avoir

$$\frac{ds}{dt} = \frac{i}{\varphi(s)},$$

d'où nous tirons,

$$\int i dt = \int \varphi(s) ds = \psi(s)$$

et

$$\int_0^t i dt = \psi(s) - \psi(s_0),$$

s_0 étant la position de la molécule d'électricité à l'origine des temps. Par conséquent, y est une fonction de s seulement et nous pouvons prendre pour les paramètres dont dépend la position d'une molécule du fluide impondérable de Maxwell les quantités y, x_1, x_2,... x_n.

154. Application au cas de deux circuits. — Si nous désignons par i_1 et i_2 les intensités des courants qui traversent ces circuits et si nous posons

$$y_1 = \int_0^t i_1 dt, \qquad \text{et} \qquad y_2 = \int_0^t i_2 dt$$

la position d'une molécule du fluide impondérable de Maxwell dépendra des paramètres y_1 et y_2 et des n paramètres x_1, x_2, x_n qui définissent la position des molécules matérielles des conducteurs. Par conséquent le mouvement du système formé par les deux courants sera donné par un système de $n + 2$ équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_i'} - \frac{dT}{dq_i} = Q_i,$$

où q_i est un quelconque des paramètres et Q_i le coefficient de δq_i dans l'expression

$$Q_1\delta q_i + Q_2\delta q_2 + \dots Q_i\delta q_i + \dots + Q_n\delta q_n$$

du travail correspondant à un déplacement virtuel du système.

155. L'énergie kinétique T qui entre dans ces équations est la somme de la demi-force vive T_1 des molécules matérielles du système et de l'énergie kinétique des molécules du fluide impondérable de Maxwell. Cette dernière étant, d'après la seconde hypothèse, le potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même, nous avons dans le cas considéré où deux courants seulement sont en présence,

$$T = T_1 + \frac{1}{2}(Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2).$$

Le premier terme T_1 de cette somme ne dépend que des dérivées x_1', x_2'..., x_n' des paramètres x_1, x_2... x_n, des molécules matérielles.

La position des molécules du fluide impondérable dépendant des paramètres y_1, y_2, x_1, x_2... x_n l'ensemble des trois derniers termes de la somme précédente pourrait dépendre de ces $n + 2$ paramètres et de leurs dérivées. Mais L, M, N, ne dépendant que de la forme et de la position relative des circuits, sont des fonctions de $x_1, x_2 \dots x_n$ seulement ; de plus i_1 et i_2 sont, d'après les intégrales qui définissent y_1 et y_2, les dérivées y_1' et y_2' de ces quantités par rapport au temps. Par conséquent l'énergie kinétique des molécules du

fluide impondérable dépend uniquement de $x_1, x_2 \dots x_n$ et de y_1' et y_2'.

156. Occupons-nous maintenant du second membre des équations. Si nous supposons le courant qui parcourt le circuit C_1 entretenu par une pile de force électromotrice E_1, la quantité d'énergie voltaïque qu'elle fournit pendant le temps dt est $E_1 i_1 dt$ ou $E_1 \delta y_1$. Or dans les idées de Maxwell la force électromotrice est une force qui agit sur les molécules du fluide impondérable ; par suite $E_1 \delta y_1$ est un travail résultant du déplacement des molécules de ce fluide.

(f.)

Mais la force électromotrice de la pile n'est pas la seule force qui agit sur les molécules du fluide impondérable ; il faut encore tenir compte de la résistance qu'oppose le milieu au mouvement de ces molécules et dont le travail se retrouve sous forme de chaleur dans le conducteur. La quantité de chaleur ainsi produite étant, d'après la loi de Joule, $R_1 i_1^2 dt$, le travail acccompli par le fluide impondérable est $- R_1 i_1^2 dt$, ou $- R_1 i_1 \delta y_1$.

Nous avons donc pour le travail du fluide impondérable dans le circuit C_1

$$(E_1 - R_1 i_1) \delta y_1,$$

et pour l'ensemble des deux circuit

$$(E_1 - R_1 i_1) \delta y_1 + (E_2 - R_2 i_2) \delta y_2.$$

Quant au travail des molécules matérielles, il ne dépend que des paramètres $x_1, x_2, \dots x_n$; nous le représenterons par

$$X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 \dots + X_n \delta x_n,$$

de sorte que nous aurons pour le travail accompli dans un

déplacement virtuel tant par les molécules du fluide impondérable que par les molécules matérielles

$$(E_1 - R_1 i_1)\delta y_1 + (E_2 - R_2 i_2)\delta y_2 + X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + X_n \delta x_n,$$

et il nous faudra, dans chacune des équations de Lagrange, prendre pour second membre le coefficient de l'expression précédente qui se rapporte au paramètre considéré.

157. Valeurs des forces électromotrices d'induction. — L'équation de Lagrange relative au paramètre y_1 est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT_1}{dy'_1} + \frac{1}{2}\frac{d\,[Li_1^2 + 2Mi_1 i_2 + Ni_2^2]}{dy'_1}\right) - \frac{dT}{dy_1} = E_1 - Ri_1.$$

Mais T ne dépend pas de y_1 puisqu'aucun de ses termes n'en dépend ; par conséquent $\frac{dT}{dy_1} = 0$. On a aussi $\frac{dT_1}{dy'_1} = 0$ car T_1 étant l'énergie kinétique des molécules matérielles il ne dépend pas de y'_1. L'équation précédente se réduit donc à

$$\frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2) = E_1 - R_1 i_1$$

ou

$$E_1 - \frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2) = R_1 i_1.$$

La force électromotrice d'induction est donc la dérivée par rapport au temps, changée de signe, de $Li_1 + Mi_2$. C'est l'expression à laquelle nous étions parvenus par la méthode de Thomson.

En écrivant l'équation de Lagrange relative au second paramètre y_2, nous trouverons pour la force électromotrice

développée dans le second circuit

$$-\frac{d}{dt}(Mi_1 + Ni_2).$$

158. Travail des forces électrodynamiques. — Si nous prenons une des équations de Lagrange relatives aux paramètres $x_1, x_2 \dots x_n$, nous obtiendrons le travail des forces électrodynamiques pour un déplacement correspondant à l'accroissement δx_l du paramètre considéré.

En effet, en observant que $Li_1^2 + 2\, Mi_1 i_2 + Ni_2^2$ ne dépend pas de la dérivée x'_l, que T_1 ne dépend pas de x_l, et que i_1 et i_2 ne dépendent ni de x'_l ni de x_l nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{dT_1}{dx'_l} - \frac{1}{2}\left(i_1^2 \frac{dL}{dx_l} + 2i_1 i_2 \frac{dM}{dx_l} + i_2^2 \frac{dN}{dx_l}\right) = X_l.$$

Si nous supposons en outre qu'à l'instant considéré le système soit au repos, T_1 sera nul, et nous aurons pour le travail résultant d'un déplacement virtuel,

$$X_l \delta x_l = -\frac{1}{2}(i_1^2 \delta L + 2i_1 i_2 \delta M + i_2^2 \delta N).$$

Mais ce travail est celui des forces extérieures qui agissent sur les molécules matérielles du système ; celui des forces électrodynamiques est de signe contraire. Il est donc égal à la variation de la fonction

$$\frac{1}{2}(Li_1^2 + 2Mi_1 i_2 + Ni_2^2)$$

qui est, comme cela devait être, le potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même.

159. Cherchons maintenant le travail des forces électrodynamiques exercées par le courant C_2, supposé fixe, sur le circuit C_1.

Le circuit C_2 ne se déformant pas, δN est nul et le travail des forces électrodynamiques se réduit à

$$\frac{1}{2}(i_1^2\delta L + 2i_1 i_2 \delta M).$$

Mais le premier terme de cette somme se rapporte à l'action que le courant C_1 exerce sur lui-même. Par conséquent le travail des forces électrodynamiques dues à l'action du courant C_2 sur le circuit C_1 a pour expression $i_1 i_2 \delta M$. D'ailleurs $Mi_1 i_2$, potentiel électrodynamique du courant C_1 par rapport au courant C_2 a pour valeur (**129**) p. 144

$$Mi_1 i_2 = i_1 \int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, d\omega$$

quand C_1 se déplace dans un milieu non magnétique, ou plus généralement

$$Mi_1 i_2 = i_1 \int (la + mb + nc)\, d\omega$$

quand C_1 se déplace dans un milieu magnétique en un point duquel les composantes de l'induction magnétique sont a, b, c; nous aurons donc pour le travail des forces électrodynamiques qui s'exercent entre C_1 et C_2

$$i_1 \delta \int (la + mb + nc)\, d\omega.$$

160. Expression des forces électrodynamiques. —

Si nous désignons par $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ les composantes de la force électrodynamique due à l'action du courant C_2 sur un élément x, y, z du circuit C_1, le travail de ces forces quand l'élément se déplace de δx, δy, δz sera

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau\,;$$

par suite le travail des forces électrodynamiques qui agissent sur C_1 sera, quand le circuit tout entier se déplace ou se déforme,

$$\int d\tau\, (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

l'intégration étant prise le long du circuit C_1. En égalant cette expression du travail à celle que nous avons trouvée précédemment nous obtenons la relation

$$(1)\quad \int d\tau\, (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1 \delta \int (la + mb + nc)\, d\omega,$$

dont nous allons évaluer le second membre.

Soient C_1 (*fig.* 32) la position initiale du circuit C_1 et C_1' sa position finale. Nous pouvons par ces deux positions faire passer une surface A et prendre pour champ d'intégration de

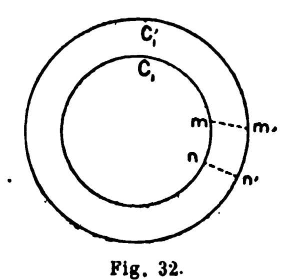


Fig. 32.

$$\int (la + mb + nc)\, d\omega,$$

l'aire limitée sur cette surface par la courbe C_1. La variation de cette intégrale quand le circuit passe de C_1 en C_1' est alors la valeur de cette même intégrale

étendue à l'aire comprise entre les deux courbes. Pour trouver cette valeur considérons un élément mn du courant C_1 dont la position après le déplacement est $m'n'$. La figure $mn\,m'n'$ peut être considérée comme un parallélogramme dont le côté mn a pour projections dx, dy, dz et le côté mm', égal au déplacement, δx, δy, δz; nous avons donc pour les aires des projections de ce parallélogramme sur les plans de coordonnées

$$\begin{aligned} ld\omega &= \delta y dz - \delta z dy, \\ md\omega &= \delta z dx - \delta x dz, \\ nd\omega &= \delta x dy - \delta y dz, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\delta \int (la + mb + nc)\, d\omega = \int a\,(\delta y dz - \delta z dy) + b\,(\delta z dx - \delta x dz) + c\,(\delta x dy - \delta y dx$$

En portant cette valeur dans l'égalité (1) il veut,

$$\int d\tau\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1 \int (cdy - bdz)\,\delta x + (adz - cdx)\,\delta y \\ (bdx - ady)\,\delta z\,;$$

ce qui nous donne en identifiant

$$\begin{aligned} Xd\tau &= i_1\,(cdy - bdz), \\ Yd\tau &= i_1\,(adz - cdx), \\ Zd\tau &= i_1\,(bdx - ady). \end{aligned}$$ (4)

Mais on sait que

$$ud\tau = i_1 dx, \qquad vd\tau = i_1 dy, \qquad wd\tau = i_1 dz,$$

par conséquent, les trois équations précédentes peuvent

s'écrire

$$(2) \qquad \begin{cases} X = cv - bw \\ Y = aw - cu \\ Z = bu - av. \end{cases}$$

161. Cas d'un nombre quelconque de courant. — Forces électrodynamiques. — Les formules précédentes s'appliquent au cas où un nombre quelconque de courants $C_2, C_3..., C_n$, agissent sur l'élément considéré du circuit C_1. En effet, appelons $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3..., c_n$ les composantes de l'induction magnétique due aux divers courants au point où se trouve l'élément de C_1. La force électrodynamique produite par l'ensemble des courants est la résultante des forces produites par chacun d'eux ; sa composante suivant l'axe des x est donc

$$X = c_2 v - b_2 w + c_3 v - b_3 w + ... + c_n v - b_n w,$$

ou

$$X = (c_2 + c_3 + ... + c_n) v - (b_2 + b_3 + ... + b_n) w$$

ou, enfin, en désignant par a, b, c les composantes suivant les trois axes de la résultante des inductions magnétiques dues aux courants $C_2, C_3... C_n$

$$X = cv - bw.$$

On peut également tenir compte de la force électrodynamique due au courant C_1 lui-même. Pour cela décomposons ce courant en deux portions, l'une ne comprenant que l'élément considéré, l'autre, le reste du circuit. On peut négliger l'action de la première portion sur elle-même et on est alors

ramené à la recherche de la force électrodynamique due à l'ensemble de n courants $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Si donc on appelle a, b, c les composantes de l'induction magnétique due à tous ces courants on a encore pour la composante suivant l'axe des x

$$X = cv - bw.$$

Les formules (2) sont donc générales.

162. Forces électromotrices d'induction. — Nous avons trouvé que, lorsqu'il n'y a qu'un seul courant C_2 placé en présence du courant C_1, la force électromotrice totale d'induction développée dans le circuit C_1 est

$$E = -\frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2).$$

Le terme $\frac{dLi_1}{dt}$ ne dépendant que de l'action du courant C_1 sur lui-même, la force électromotrice d'induction due seulement au courant C_2 est donnée par $\frac{dMi_2}{dt}$, dérivée que nous allons mettre sous une autre forme.

La variation δMi_2 de la quantité Mi_2, quand le circuit C_1 se déplace et que les intensités des courants varient, peut être considérée comme la somme de la variation résultant du déplacement, les intensités restant constantes et de la variation due au changement des intensités dans les circuits supposés fixes. Or nous avons démontré (157) que la variation de Mi_1i_2 due au déplacement relatif des deux circuits dans lesquels les intensités conservent les mêmes valeurs, est

$$\delta Mi_1i_2 = i_1\int a(\delta y dz - \delta z dy) + b(\delta z dx - \delta x dz) + c(\delta x dy - \delta y dx);$$

par conséquent, nous aurons pour la variation correspondente de Mi_2, l'intégrale du second membre.

Pour avoir la variation de Mi_2 résultant du changement des intensités prenons $M_1 i_2$ sous la forme

$$Mi_1 i_2 = i_1 \int_{C_1} F dx + G dy + H dz.$$

Puisque les circuits ne se déforment ni ne se déplacent, le contour d'intégration reste le même et la variation de Mi_2 se réduit à

$$\int_{C_1} \delta F dx + \delta G dy + \delta H dz.$$

Nous aurons donc pour la variation totale de Mi_2

$$\int a(\delta y dz - \delta z dy) + b(\delta z dx - \delta x dz) + c(\delta x dy - \delta y dz)$$
$$+ \int \delta F dx + \delta G dy + \delta H dz$$

et par suite, pour la force électromotrice d'induction

$$-\frac{dMi_2}{dt} = -\int a(y'dz - z'dy) + b(z'dx - x'dz) + c(x'dy - y'dx)$$
$$- \int \frac{dF}{dt} dx + \frac{dG}{dt} dy + \frac{dH}{dt} dz$$

ou encore

$$-\frac{dMi_2}{dt} = \int \left(cy' - bz' - \frac{dF}{dt}\right) dx + \left(az' - cx' - \frac{dG}{dt}\right) dy$$
$$+ \left(bx' - ay' - \frac{dH}{dt}\right) dz$$

163. Si nous désignons par P, Q, R les composantes suivant les trois axes de la force électromotrice d'induction par unité de longueur, la force électromotrice dans le circuit C_1 est donnée par l'intégrale

$$\int_{C_1} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz.$$

En identifiant avec l'expression précédente de la force électromotrice nous obtiendrons trois relations dont la première est

$$\int \mathrm{P}dx = \int \left(cy' - bz' - \frac{d\mathrm{F}}{dt} \right) dx.$$

Nous en tirons par différentiation

$$(1) \qquad \mathrm{P} = cy' - bz' - \frac{d\mathrm{F}}{dt};$$

mais il est évident que nous pouvons ajouter au second membre de cette dernière relation la dérivée partielle $-\frac{d\psi}{dx}$ d'une fonction uniforme $-\psi$, car, en intégrant, l'intégrale relative à ce terme sera nulle et la relation (1) sera encore satisfaite. Nous avons donc pour les composantes de la force électromotrice d'induction par unité de longueur

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{P} = cy' - bz' - \frac{d\mathrm{F}}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ \mathrm{Q} = az' - cx' - \frac{d\mathrm{G}}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ \mathrm{R} = bx' - ay' - \frac{d\mathrm{H}}{dt} - \frac{d\psi}{dz}. \end{cases}$$

164. Montrons maintenant que ces équations sont encore applicables au cas où un nombre quelconque de courants C_2, C_3,... C_n sont en présence du courant C_1.

La force électromotrice d'induction développée dans C_1 par l'ensemble des $n-1$ autres courants est égale à la somme des forces électromotrices développées par chacun d'eux ; on a donc pour la composante P,

$$\begin{aligned} P = c_2 y' - b_2 z' - \frac{dF_2}{dt} - \frac{d\psi_2}{dx} \\ + c_3 y' - b_3 z' - \frac{dF_3}{dt} - \frac{d\psi_3}{dx} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_n y' - b_n z' - \frac{dF_n}{dt} - \frac{d\psi_n}{dx}. \end{aligned}$$

ou

$$P = y'\sum c - z'\sum b - \frac{d\Sigma F}{dt} - \frac{d\Sigma\psi}{dx}.$$

Or $\sum c$ et $\sum b$ sont les composantes suivant deux des axes de l'induction magnétique au point considéré sur C_1 ; $\sum F$ est la composante du moment électromagnétique au même point ; quant à $\sum \psi$ c'est une fonction uniforme des coordonnées. Par conséquent la première des équations du groupe (2) s'applique au cas d'un nombre quelconque de courants pourvu que l'on prenne pour b, c, et F les valeurs de ces quantitée dues à l'ensemble des courants agissants. On verrait de la même manière que les deux autres équations sont également applicables.

165. On peut aussi tenir compte de l'action du courant C_1 sur lui-même. En effet nous pouvons considérer le circuit C_1 comme formé de deux portions, l'une se réduisant à l'élément de circuit pour lequel on cherche les composantes de la force électromotrice, l'autre comprenant le reste du circuit. Cette dernière portion peut être confondue avec le circuit C_1 lui-même, de sorte que si l'on néglige l'induction de l'élément sur lui-même l'induction provient des n circuits C_1 $C_2, \ldots C_n$. Les composantes de la force électromotrice seront donc données par les formules (2) où a, b, c, F, G, H seront les valeurs dues à tous les courants.

166. Signification de ψ. — La fonction ψ est une fonction quelconque des coordonnées assujettie à la seule condition d'être uniforme. Maxwell admet que c'est le potentiel électrostatique résultant des masses électriques qui peuvent exister dans le champ.

Cette hypothèse aurait besoin d'être vérifiée expérimentalement par la concordance entre les valeurs mesurées des forces électromotrices d'induction et les valeurs fournies par les équations (2) où ψ serait donnée par l'expérience et les quantités a, b, c F, G, H par les formules

$$a = \alpha + 4\pi A,$$
$$b = \beta + 4\pi B,$$
$$c = \gamma + 4\pi C,$$

et

$$F = \int \frac{u d\tau}{r} \qquad G = \int \frac{v d\tau}{r} \qquad H = \int \frac{w d\tau}{r}.$$

Toutefois il est toujours permis de prendre pour ψ le potentiel électrostatique car les quantités F, G, H n'ont pu être déterminées qu'en les supposant liées par l'équation différentielle

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0$$

et nous sommes libres d'abandonner cette hypothèse. Si nous n'avions pas introduit cette, hypothèse nous aurions trouvé pour F, G, H des valeurs de la forme



$$F=\int\frac{u}{r}d\tau+\frac{d\chi}{dx}$$

χ étant une fonction arbitraire des coordonnées et pour les composantes P, Q, R de la force électromotrice par unité de longueur

$$P=cy'-bz'-\int\frac{du}{dt}\frac{d\tau}{r}-\frac{d^2\chi}{dxdt}-\frac{d\psi}{dx},$$

$$Q=az'-cx'-\int\frac{dv}{dt}\frac{d\tau}{r}-\frac{d^2\chi}{dydt}-\frac{d\psi}{dy},$$

$$R=bx'-ay'-\int\frac{dw}{dt}\frac{d\tau}{r}-\frac{d^2\chi}{dzdt}-\frac{d\psi}{dz}.$$

Il est donc toujours possible, en choisissant convenablement la fonction arbitraire χ de faire en sorte que la fonction ψ qui entre dans ces équations et les équations (2) représente le potentiel électrostatique.

CHAPITRE X

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU CHAMP MAGNÉTIQUE

167. Équations du champ magnétique. — Récapitulons les équations qui lient entre elles les composantes en un point de l'induction magnétique, de la force et du moment électromagnétiques, de la force électromotrice d'induction et de la vitesse de l'électricité.

Dans le § 103 nous avons vu, que si α, β, γ sont les composantes de la force magnétique en un point d'un milieu magnétique dont le coefficient de perméabilité est μ, les composantes de l'induction magnétique au même point sont données par les équations

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \mu\alpha, \\ b &= \mu\beta, \\ c &= \mu\gamma, \end{aligned} \right.$$

Si au point considéré passe un flux d'électricité, les composantes u, v, w de la vitesse de ce flux peuvent être déduites des composantes de la force magnétique au moyen des rela-

tions établies au § 118 :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v = \dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \dfrac{d\beta}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy}. \end{cases}$$

p. 133

Quant aux composantes F, G, H du moment électromagnétique elles sont liées (§ 131) à celles de l'induction magnétique par les équations différentielles

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz}, \\ b = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx}, \\ c = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy}. \end{cases}$$

Mais puisque a, b, c sont les produits de α, β, γ par un facteur constant μ et que α, β, γ dépendent de u, v, w les composantes F, G, H du moment électromagnétique sont elles-mêmes des fonctions de u, v, w. D'après ce que nous avons dit aux § 137 et 166 ces fonctions ont pour expressions :

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} F = \mu \displaystyle\int \frac{u}{r}\, d\tau + \frac{d\chi}{dx}, \\ G = \mu \displaystyle\int \frac{v}{r}\, d\tau + \frac{d\chi}{dy}, \\ H = \mu \displaystyle\int \frac{w}{r}\, d\tau + \frac{d\chi}{dz}. \end{cases}$$

Enfin la force électromotrice résultant de l'induction élec-

tromagnétique et des masses électriques à l'état statique a pour composantes, ainsi que nous l'avons montré au § 163,

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= az' - cx' - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= bx' - ay' - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}. \end{aligned} \right.$$

168. Équations des courants de conduction. — Dans les formules (III), u, v, w désignent les composantes de la vitesse de l'électricité sans distinction du mode de mouvement : conduction ou déplacement. Dans le cas où l'on a un courant de conduction ces composantes doivent en outre satisfaire aux équations qui expriment la loi de Ohm. Au § 87 nous avons vu que si C désigne la conductibilité électrique du milieu et X la variation par unité de longueur de la projection suivant l'axe des x des forces électromotrices résultant de toute autre cause qu'une différence de potentiel statique, nous avons pour la premières de ces équations,

$$\frac{u}{C} = -\frac{d\psi}{dx} + X.$$

Lorsqu'on suppose que ces forces électromotrices sont dues uniquement à l'induction exercée par les masses magnétiques et les courants qui varient ou qui se déplacent dans le champ, le second membre de cette dernière équation est égal à P. Par conséquent, nous avons alors pour les trois composantes de la vitesse de l'électricité dans un courant de conduction

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= CP, \\ v &= CQ, \\ w &= CR. \end{aligned} \right.$$

169. Équations des courants de déplacement. — Les équations précédentes ne sont pas applicables aux courants de déplacement, ces courants étant supposés ne pas suivre la loi d'Ohm. Quant aux équations (III) elles doivent être satisfaites puisque, comme nous l'avons déjà dit (**118**), Maxwell admet que les courants de déplacement obéissent aux lois électromagnétiques et électrodynamiques d'Ampère. Mais outre ces dernières équations, il en existe trois autres qui lient les composantes de la vitesse de l'électricité, dans un courant de ce genre, aux composantes de la force électromotrice.

Nous avons vu, en effet (**72**), que les composantes du déplacement électrique sont données par trois équations dont la première est

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx} - X\right),$$

X ayant dans cette formule la même signification que dans le paragraphe précédent. Si donc, nous admettons que les forces électromotrices soient dues uniquement à une différence de potentiel statique et à l'induction des aimants et des courants placés dans le champ, le facteur entre parenthèses dans l'expression de f est égal à — P ; par suite, nous avons alors,

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi} P, \\ g &= \frac{K}{4\pi} Q, \\ h &= \frac{K}{4\pi} R. \end{aligned} \right.$$

En dérivant ces équations par rapport au temps, il vient pour les composantes u, v, w de la vitesse du déplacement

électrique

$$
\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt}, \\ v &= \frac{K}{4\pi}\frac{dQ}{dt}, \\ w &= \frac{K}{4\pi}\frac{dR}{dt}. \end{aligned} \right.
$$

Équations des courants dans un milieu imparfaitement isolant. — Le groupe d'équations (VI) s'applique aux milieux conducteurs, comme les métaux ; le groupe d'équations (VIII) s'applique, au contraire, aux milieux parfaitement isolants. Lorsque le corps est imparfaitement isolant, Maxwell admet que le *courant électrique vrai*, duquel dépendent les phénomènes électromagnétiques, a pour composantes la somme des composantes du courant de conduction et du courant de déplacement ; nous avons donc dans ce cas

$$
\text{(IX)} \quad \left\{ \begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi}\frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi}\frac{dR}{dt}. \end{aligned} \right.
$$

Remarquons que l'hypothèse de Maxwell soulève une difficulté. En effet, le milieu possédant des propriétés intermédiaires entre celles des conducteurs et celles des isolants, la force électromotrice qui produit le courant doit vaincre deux espèces de résistances : l'une analogue à la résistance $\frac{1}{C}$ des métaux, l'autre du genre de celle qu'oppose un isolant. Il

semble donc que, contrairement aux vues de Maxwell, l'intensité du courant et, par suite, les quantités u, v, w dussent alors être plus petites que dans un milieu conducteur ou un milieu parfaitement isolant.

171. M. Potier a substitué à l'hypothèse de Maxwell une hypothèse plus rationnelle. Il admet que la force électromotrice en un point est la somme de celle qui donne lieu au courant de conduction et de celle qui produit le déplacement. Nous avons alors, en tirant des équations (VI) et (VII) les valeurs des composantes de la force électromotrice et additionnant :

$$
\text{(X)} \quad \left\{
\begin{aligned}
P &= \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{K} f, \\
Q &= \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{K} g, \\
R &= \frac{w}{C} + \frac{4\pi}{K} h.
\end{aligned}
\right.
$$

172. Les formules (IX) et les formules se réduisent à celles des courants de conduction, les premières pour $K = 0$, les secondes pour $K = \infty$. Un conducteur doit donc être considéré, d'après Maxwell, comme un diélectrique de pouvoir inducteur nul, et, d'après M. Potier, comme un diélectrique de pouvoir inducteur infini.

La conséquence de l'hypothèse de M. Potier s'interprète facilement dans la théorie des cellules.

Dans cette théorie, en effet, on se représente un diélectrique parfait comme formé par des cellules parfaitement conductrices séparées les unes des autres par des intervalles parfaitement isolants.

Qu'arrivera-t-il alors pour un corps tenant le milieu entre les diélectriques et les conducteurs, c'est-à-dire pour un diélectrique imparfait ?

Les formules de Maxwell et celle de M. Potier donnent à cette question deux réponses différentes.

Adoptons-nous les formules de Maxwell ? C'est supposer que les intervalles qui séparent les cellules ne sont plus parfaitement isolants mais que leur conductibilité spécifique C n'est plus nulle.

173. Adoptons-nous au contraire les formules de M. Potier ; cela revient à supposer que les cellules conductrices ne sont plus parfaitement conductrices et que leur conductibilité C n'est plus infinie.

Il est peu probable que la réalité soit aussi simple que le supposent Maxwell et M. Potier. Peut-être devrait-on adopter une combinaison des deux hypothèses : des cellules imparfaitement conductrices, séparées par des intervalles imparfaitement isolants.

Tout cela a d'ailleurs peu d'importance; toutes ces hypothèses ne peuvent être regardées que comme une première approximation, appropriée à l'état actuel de la science; et dans cet état actuel, on n'a intérêt à considérer que des conducteurs ordinaires ou des diélectriques regardés comme parfaits.

CHAPITRE XI

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA LUMIÈRE

174. Conséquences des théories de Maxwell. — Des diverses théories que nous avons exposées dans les Chapitres précédents, il résulte nettement que la préoccupation constante de Maxwell est de trouver une explication des phénomènes électriques et électromagnétiques, généralement attribués à des actions s'exerçant à distances, par le mouvement d'un fluide hypothétique remplissant l'espace. Nous avons pu constater que Maxwell n'avait qu'imparfaitement atteint son but ; en particulier nous avons vu dans le Chapitre VI que, s'il est possible de rendre compte des attractions et des répulsions électrostatiques au moyen des pressions et des tensions d'un fluide remplissant les diélectriques, les propriétés qu'il faut alors attribuer à ce fluide sont incompatibles avec celles que Maxwell lui suppose dans d'autres parties de son ouvrage. Ainsi, malgré les efforts de Maxwell, nous ne possédons pas encore une explication mécanique complète de ces phénomènes; néanmoins les tra-

vaux de ce physicien ont une importance capitale: ils démontrent la possibilité d'une telle explication.

175. Mais laissons de côté les quelques contradictions que nous avons relevées dans l'œuvre de Maxwell et attachons-nous plus spécialement à la théorie qu'il a proposée pour expliquer l'Electromagnétisme et l'Induction et que nous avons exposée dans le Chapitre IX. Une des conséquences les plus importantes de cette théorie, et cette conséquence mérite à elle seule toute notre admiration, est l'identité des propriétés essentielles de l'éther qui, d'après Fresnel transmet les radiations lumineuses et du fluide que Maxwell suppose présider aux actions électromagnétiques. Ainsi (que le fait observer ce dernier) cette identité de propriétés est une confirmation de l'existence d'un fluide servant de véhicule à l'énergie.

« Remplir l'espace d'un nouveau milieu toutes les fois que l'on doit expliquer un nouveau phénomène ne serait point un procédé bien philosophique ; au contraire, si, étant arrivés indépendamment, par l'étude de deux branches différentes de la science à l'hypothèse d'un milieu, les propriétés qu'il faut attribuer à ce milieu pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques se trouvent être de la même nature que celles que nous devons attribuer à l'éther lumінifère pour expliquer les phénomènes de la lumière, nos raisons de croire à l'existence physique d'un pareil milieu se trouveront sérieusement confirmées. » Maxwell. *Traité d'Electricité*, t. II, § 781.

176. L'éther et le fluide de Maxwel jouissant des mêmes

propriétés, la lumière doit être considérée comme un phénomène électromagnétique et le mouvement vibratoire qui produit, sur notre rétine, l'impression d'une intensité lumineuse doit résulter de perturbations périodiques du champ magnétique. S'il en est ainsi, des équations générales de ce champ doit pouvoir se déduire l'explication des phénomènes lumineux. C'est à cette explication qu'on a donné le nom de *Théorie électromagnétique de la lumière.*

Cette théorie conduit nécessairement à des relations entre les valeurs des constantes optiques et des constantes électriques d'un même corps. Si ces relations se trouvent satisfaites numériquement par les données de l'expérience, elles constitueront autant de vérifications, indirectes mais néanmoins très probantes, de la théorie. L'une des meilleures vérifications de ce genre est l'accord satisfaisant que l'on constate entre les valeurs trouvées par Foucault, Fizeau et M. Cornu pour la vitesse de propagation de la lumière et celle qu'on déduit de la théorie électromagnétique. Cherchons donc la formule qui exprime cette vitesse en fonction des constantes électriques mesurables du milieu où s'effectue la propagation.

177. Équations de la propagation d'une perturbation magnétique dans un diélectrique. — Tous les corps transparents étant des isolants plus ou moins parfaits, si toutefois on excepte les solutions électrolytiques, bornons d'abord notre étude à la considération des diélectriques. De plus admettons que les molécules matérielles du milieu qui propage les perturbations magnétiques sont en repos.

Par suite de cette dernière hypothèse les composantes x', y', z', de la vitesse d'un point matériel sont nulles et les

équations (V) du § 167 se réduisent aux suivantes:

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},$$

$$Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy},$$

$$R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}.$$

Le potentiel électrostatique ψ étant dû à des masses électriques ne variant ni en grandeur, ni en position, cette quantité et ses dérivées partielles par rapport à x, y, z sont indépendantes du temps; par conséquent en dérivant les équations précédentes par rapport à t, nous obtenons

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\frac{d^2F}{dt^2}, \\ \frac{dQ}{dt} = -\frac{d^2G}{dt^2}, \\ \frac{dR}{dt} = -\frac{d^2H}{dt^2}. \end{cases}$$

La perturbation magnétique étant supposée s'effectuer dans un milieu diélectrique, les composantes u, v, w de la vitesse de l'électricité sont liées aux composantes de la force électromotrice par les équations (VIII) d'où nous pouvons tirer les dérivées de P, Q, R par rapport à t. En portant les valeurs de ces dérivées dans les équations précédentes nous avons

$$(2) \qquad \begin{cases} 4\pi u = -K\frac{d^2F}{dt^2}, \\ 4\pi v = -K\frac{d^2G}{dt^2}, \\ 4\pi w = -K\frac{d^2H}{dt^2}. \end{cases}$$

Pour avoir les équations différentielles qui donnent F, G, H en fonction du temps, il nous faut exprimer u, v, w en fonction de F, G, H et des dérivées de ces quantités. Pour cela adressons-nous aux groupes d'équations (I), (II) et (III).

Les équations (I) et (III) nous donnent

$$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

$$\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$$

$$\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Au moyen de ces équations calculons les dérivées de α, β, γ, par rapport à x, y, z et portons les valeurs ainsi trouvées dans les équations (II); nous obtenons

$$4\pi\mu u = \frac{dJ}{dx} - \Delta F,$$

$$4\pi\mu v = \frac{dJ}{dy} - \Delta G,$$

$$4\pi\mu w = \frac{dJ}{dz} - \Delta H,$$

J désignant la somme des dérivées partielles :

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}.$$

L'élimination de u, v, w entre ces dernières équations et les équations (2) nous conduit aux équations différentielles

cherchées

$$(A) \quad \begin{cases} K\mu \dfrac{d^2F}{dt^2} = \Delta F - \dfrac{dJ}{dx}, \\ K\mu \dfrac{d^2G}{dt^2} = \Delta G - \dfrac{dJ}{dy}, \\ K\mu \dfrac{d^2H}{dt^2} = \Delta H - \dfrac{dJ}{dz}. \end{cases}$$

Sous cette forme, ces équations sont semblables à celles du mouvement d'une molécule d'un milieu élastique (1) et par conséquent à celles du mouvement d'une molécule d'éther ; c'est une première confirmation de l'hypothèse sur la nature électromagnétique des vibrations lumineuses.

178. Ces équations étant linéaires et à coefficients constants, les dérivées par rapport à une variable quelconque des fonctions F, G, H qui y satisfont, sont aussi des solutions de ces équations ; en outre, il en est encore de même combinaison linéaire de ces dérivées. Par conséquent les composantes *a*, *b*, *c* de l'induction magnétique, liées aux composantes du moment électromagnétique par les relations (III) satisfont aux équations (A). D'ailleurs dans ce cas ces dernières se simplifient car la quantité J est alors

$$J = \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}$$

et nous savons que cette somme de dérivées partielles est

(1) Voir *Théorie mathématique de la lumière*, p. 42.

nulle (**102**). Nous avons donc

$$K\mu \frac{d^2a}{dt^2} = \Delta a,$$

$$K\mu \frac{d^2b}{dt^2} = \Delta b,$$

$$K\mu \frac{d^2c}{dt^2} = \Delta c.$$

Quant aux composantes α, β, γ de la force magnétique elles doivent également satisfaire aux équations (A) puisqu'elles ne diffèrent de a, b, c que par un facteur constant; la somme J des dérivées partielles subsiste alors dans les équations.

Enfin les composantes u, v, w de la vitesse du déplacement étant des fonctions linéaires et homogènes des dérivées de α, β, γ, sont aussi des solutions des équations (A). L'hypothèse de l'incompressibilité de l'électricité étant exprimée par la condition

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

J disparaît des équations.

179. D'ailleurs si comme le suppose Maxwell (**133**), les composantes F, G, H du moment électromagnétique satisfont à l'identité

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0,$$

les équations (A) et celles qui donnent les composantes de la force magnétique ne contiennent pas J. Mais l'abandon de cette hypothèse ne modifie en rien les résultats auxquels conduit la théorie électromagnétique de la lumière car J

disparaît lorsqu'on suppose périodiques les perturbations du champ magnétique.

En effet dérivons les équations (A) par rapport à x, y, z, et additionnons; nous obtenons après simplification

$$K\mu \frac{d^2J}{dt^2} = 0.$$

J doit donc être une fonction linéaire du temps, ou une constante, ou zéro; il en est de même pour les dérivées de J par rapport à x, y, z. Or, si F, G, H sont des fonctions périodiques du temps, J et ces dérivées sont également des fonctions périodiques; par suite ces quantités ne peuvent être ni des fonctions du premier degré en t, ni des constantes; elles sont donc nulles.

180. Cas des ondes planes. — Supposons que les phénomènes électromagnétiques qui ont lieu dans le diélectrique ne dépendent que du temps et de la coordonnée z du point considéré. Dans ce cas ces phénomènes sont, au même instant, identiques pour tous les points d'un plan parallèle au plan des xy; on dit alors que les perturbations magnétiques forment des *ondes planes*.

Les composantes F, G, H du moment électromagnétique ne dépendant pas de x, ni de y, les dérivées de ces quantités par rapport à x et à y sont nulles et les équations (A) se réduisent à

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} K\mu \frac{d^2F}{dt^2} &= \frac{d^2F}{dz^2} \\ K\mu \frac{d^2G}{dt^2} &= \frac{d^2G}{dz^2} \\ K\mu \frac{d^2H}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation montre que dans le cas où les perturbations sont périodiques la composante H est nulle. Par conséquent le moment électromagnétique est situé dans le plan de l'onde. Il en est de même des autres quantités, vitesse de l'électricité, force électromagnétique, etc., dont les composantes satisfont à des équations semblables aux équations (B). On peut donc dire que, comme les vibrations de l'éther dans la théorie ordinaire de la lumière, les perturbations électromagnétiques périodiques sont *tranversales*.

181. Vitesse de propagation d'une onde plane périodique. — Si nous posons

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}},$$

les deux premières des équations (B) deviennent

$$\frac{d^2F}{dt^2} = V^2 \frac{d^2F}{dz^2},$$
$$\frac{d^2G}{dt^2} = V^2 \frac{d^2G}{dz^2}.$$

Sous cette forme, ces équations sont identiques à celles qui donnent les composantes du déplacement d'une molécule d'un milieu élastique dans le cas d'un mouvement par ondes planes transversales. Nous pouvons donc considérer les perturbations électromagnétiques comme se propageant avec une vitesse égale à $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$.

182. Valeur de cette vitesse dans le vide. — Le coefficient de perméabilité μ du vide étant égal à 1 dans le

système de mesures électromagnétiques, la vitesse de propagation des ondes planes dans ce milieu est égale à $\frac{1}{\sqrt{K}}$, K étant exprimé dans le même système. Cherchons la valeur de cette quantité.

L'une des composantes du déplacement électrique est donnée par la formule

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}.$$

Le pouvoir inducteur spécifique n'ayant pas de dimensions dans le système électrostatique, les dimensions du déplacement dans ce système sont celles du quotient d'un potentiel par une longueur et, par suite, celle du quotient d'une quantité d'électricité par le carré d'une longueur. Il s'ensuit que si on passe d'un système de mesures à un autre dans lequel l'unité de longueur a conservé la même valeur que dans le premier, les nombres qui mesurent le déplacement dans l'un et l'autre système sont dans le même rapport que ceux qui expriment une même quantité d'électricité. Si donc nous appelons v le rapport de l'unité électromagnétique de quantité d'électricité à l'unité électrostatique, le nombre qui exprime, soit une quantité d'électricité, soit un déplacement dans le premier système est égal au produit de $\frac{1}{v}$ par le nombre qui mesure la même grandeur dans le système électrostatique. D'autre part on sait que le rapport des unités de force électromotrice dans les deux systèmes de mesure électrique est inverse de celui des unités de quantité; donc le nombre qui exprime $\frac{d\psi}{dx}$ dans le système électromagnétique est le produit

de v par la mesure de cette quantité au moyen de l'unité électrostatique. Il en résulte que la valeur du quotient de f par $\frac{d\psi}{dx}$ et, par suite, la valeur de K se trouvent multipliées par $\frac{1}{v^2}$ quand on passe du système électrostatique au système électromagnétique. Le pouvoir inducteur spécifique du vide étant 1 dans le système électrostatique, sa valeur est $\frac{1}{v^2}$ dans le système électromagnétique.

Si nous portons cette valeur de K dans l'expression de la vitesse, nous avons

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2}}} = v;$$

la vitesse de propagation d'une perturbation électromagnétique est donc égale au rapport v des unités de quantité d'électricité dans les deux systèmes de mesures électriques.

183. Cette dernière quantité a été déterminée par de nombreux expérimentateurs au moyen de méthodes que l'on peut classer en trois groupes suivant que v est donné par le rapport des unités de quantité d'électricité, ou par celui des forces électromotrices, ou enfin par la comparaison des capacités. Voici les résultats de quelques-unes de ces déterminations pour le quotient par 10^{10} de la valeur de v exprimée en unités C. G S.

		$\frac{v}{10^{10}}$
1er groupe.	Weber et Kohlrausch .	3,1074
2me groupe.	Maxwell.	2,8800
	Thomson	2,8250
	Kichan et King . . .	2,8920
	Shida.	2,9580
	Exner.	2,9200

3me groupe.	Ayrton et Perry . . .	2,9410
	J.-J. Thomson. . . .	2,9630
	Klemencic	3,0180
		3,0140
	Himstedt	3,0074
		3,0081
	E.-B. Rosa.	2,9993
		3,0004

Pour la vitesse de la lumière dans le vide, M. Cornu a trouvé $3,004 \times 10^{10}$ centimètres avec une erreur probablement inférieure à $^1/_{1000}$. On voit que ce nombre ne diffère que d'une quantité très petite, de l'ordre des erreurs expérimentales, des valeurs de *v* données par MM. Klémencic, Himstedt, Rosa, d'après des méthodes paraissant présenter la plus grande précision. La théorie de Maxwell reçoit donc une confirmation aussi satisfaisante qu'il est permis de la souhaiter.

Ajoutons que tout récemment, M. Hertz a pu produire dans l'air des ondes électromagnétiques et mesurer leur vitesse de propagation. Il a trouvé un nombre du même ordre de grandeur que la vitesse de la lumière. C'est encore une vérification très satisfaisante de la théorie électromagnétique de la lumière, si l'on tient compte de la difficulté de la mesure des quantités qui entrent dans le calcul de M. Hertz. Nous reviendrons plus tard sur ces expériences.

184. Relation entre l'indice de réfraction et le pouvoir inducteur d'une substance isolante. — La perméabilité magnétique des milieux transparents étant très sensiblement égale à celui du vide, le rapport de la vitesse de

propagation V_1 des ondes électromagnétiques dans le vide de la vitesse V de ces ondes dans un milieu transparent est

$$\frac{V_1}{V} = \sqrt{K},$$

K étant le pouvoir inducteur spécifique de ce dernier milieu exprimé dans le système électrostatique.

D'après la théorie ordinaire de la lumière ce rapport est égal à l'indice de réfraction absolu n. Il en résulte que l'on doit avoir

$$K = n^2.$$

Mais, puisque n varie avec la longueur d'onde, cette relation ne peut évidemment être satisfaite que si les quantités K et n se rapportent à des phénomènes de même période. Nous devons donc prendre l'indice de réfraction qui correspond à des ondes de très longue période, ces ondes étant les seules dont le mouvement puisse se comparer aux opérations lentes à l'aide desquelles on détermine le pouvoir inducteur spécifique. La valeur de cet indice peut être obtenue approximativement en faisant $\lambda = \infty$ dans la formule de Cauchy,

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4};$$

nous avons ainsi, $n = A$.

Des expériences faites sur le spectre calorifique, il résulte que la formule de Cauchy ne suffit pas pour représenter les indices des radiations de longues période ; la formule qui les représente le mieux est de la forme :

$$n = A\lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^2}$$

On trouverait ainsi pour $\lambda = \infty$, $n = \infty$ ce qui est inadmissible; mais ce qui montre combien il faut peu se fier à des extrapolations de ce genre. C'est sans doute là la principale cause des divergences que nous signalons plus loin.

185. Au moment où Maxwell écrivait son Traité, la paraffine était le seul diélectrique dont le pouvoir inducteur ait été déterminé avec une exactitude suffisante. Une seule vérification de la relation $K = n^2$ était donc possible; encore était-elle peu satisfaisante. MM. Gibson et Barclay avaient trouvé pour le pouvoir inducteur de la paraffine solide 1,975, dont la racine carrée est 1,405. Or ce nombre diffère sensiblement de la valeur 1,422 de l'indice de réfraction, pour une longueur d'onde infinie, déduite des expériences du Dr Gladstone sur la paraffine fondue. Toutefois, les nombres comparés se rapportant à deux états différents de la paraffine, leur divergence ne peut infirmer la théorie; aussi Maxwell en conclut-il seulement que si la racine carrée de K n'est pas l'expression complète de l'indice de réfraction, elle en forme le terme le plus important.

186. Depuis, on a fait de nombreuses déterminations des pouvoirs inducteurs spécifiques des corps transparents; en voici les résultats, au point de vue qui nous occupe.

Pour les solides la racine carrée de K diffère de l'indice de réfraction d'une quantité quelquefois considérable. D'après M. Hopkinson les indices de réfraction des différentes espèces de verre sont toujours plus petits que la racine carrée de leur pouvoir inducteur; pour certains verres ils ne sont que la moitié de cette racine.

La relation $K = n^2$ se trouve un peu mieux vérifiée dans

le cas des liquides. Pour certains hydrocarbures liquides, les expériences de MM. Hopkinson, Négréano, Palaz montrent que la vérification est assez satisfaisante. Les deux tableaux suivants résument, le premier les résultats de M. Negréano, le second ceux de M. Palaz ; dans ces tableaux l'indice de réfraction se rapporte à la raie D du sodium.

I

	K	$\sqrt{K}$	n_D
Benzine pure..	2,2921	1,5139	1,5062
Toluène.	2,2420	1,4949	1,4912
Xylène (mélange de plusieurs isomères)	2,2679	1,5059	1,4897
Métaxylène.	2,3781	1,5421	1,4977
Pseudocumène.	2,4310	1,5591	1,4837
Cymène.	2,4706	1,5716	1,4837
Essence de térébenthine	2,2618	1,5039	1,4726

II

Benzine.	2,3377	1,517	1,4997
Toluène n° 1..	2,3646	1,537	1,4949
» n° 2..	2,3649	1,537	1,4848
Pétrole ordinaire n° 1..	2,1234	1,457	1,4487
» » n° 2..	2,0897	1,445	1,4477
» rectifié.	2,1950	1,481	1,4766

La vérification est beaucoup moins bonne si l'on prend des huiles végétales ou animales. Pour celles sur lesquelles il a opéré, M. Hopkinson a toujours trouvé $n > \sqrt{K}$. M. Palaz arrive à une conclusion inverse pour l'huile de navet et l'huile de ricin :

Huile de navet.	$\sqrt{K} = 1,737$	$n_D = 1,4706$
Huile de ricin..	2,147	1,4772.

Récemment, M. Gouy [1] a mesuré le pouvoir inducteur spécifique de l'eau par l'attraction qu'éprouvent deux plateaux électrisés entre lesquels se trouve une couche de ce liquide; il a trouvé $K = 80$. Il en résulterait, d'après la relation de Maxwell, $n = 9$ environ, nombre à peu près sept fois plus grand que l'indice de réfraction réel ; cette relation est donc dans ce cas, tout à fait en défaut. Il est vrai qu'elle n'a été établie que pour les corps isolants, condition qui est loin d'être satisfaite par l'eau, toujours plus ou moins conductrice par suite des sels qu'elle contient. Mais au moins on devrait trouver pour K des valeurs de plus en plus petites lorsqu'on prend de l'eau de plus en plus pure; or c'est précisément l'inverse qui paraît avoir lieu.

Enfin, si nous passons aux gaz, nous trouvons un accord très satisfaisant entre les valeurs de $\sqrt{K}$ et celles de n. Le tableau suivant donne les valeurs de ces quantités pour quelques gaz; les valeurs du pouvoir inducteur spécifique résultent des expériences de M. Boltzmann.

	K	$\sqrt{K}$	n
Air.	1,000590	1,000295	1,000294
Acide carbonique.	1,000946	1,000473	1,000449
Hydrogène.	1,000264	1,000132	1,000138
Oxyde de carbone. . . .	1,000690	1,000345	1,000340
Protoxyde d'azote. . . .	1,000984	1,000492	1,000503
Bicarbure d'hydrogène. .	1,001312	1,000656	1,000678
Protocarbure d'hydrogène	1,000944	1,000472	1,000443

187. En résumé, la relation $K = n^2$ est vérifiée pour les

[1] *Comptes rendus*, t. CVI, p. 540 ; 1888.

gaz et quelques liquides; elle est en défaut pour la plupart des liquides, des solides, et surtout pour l'eau. Malgré la multiplicité des recherches, nous ne sommes donc pas mieux renseignés que Maxwell sur le degré d'exactitude qu'on doit accorder à cette relation.

Mais si l'on excepte l'eau, qui s'écarte complètement des diélectriques par sa nature électrolytique dès quelle renferme une trace d'un sel en dissolution, les divergences constatées entre n et la racine carrée de K ne sont pas de nature à faire abandonner cette relation, surtout si l'on tient compte des conditions défectueuses dans lesquelles on l'applique. En premier lieu les substances étudiées en vue de sa vérification sont souvent loin d'être des isolants parfaits comme le suppose sa démonstration. Comme isolants, la plupart des solides sont beaucoup moins bons que les gaz et quelques liquides tels que le pétrole et la benzine bien pure ; or ce sont précisément ces derniers corps qui vérifient le mieux la relation de Maxwell. En second lieu, le pouvoir inducteur et l'indice de réfraction varient avec la température, et généralement les mesures des deux quantités à comparer sont faites à des températures différentes. Enfin, on sait que, quelle que soit la méthode employée pour la mesure de K, les résultats dépendent de la rapidité des variations du champ dans lequel se trouve placée la substance ; peut-être donc, la relation dont il s'agit se trouverait-elle mieux satisfaite si les variations du champ étaient aussi rapides que les vibrations lumineuses. Pour ces diverses raisons il ne faut pas s'étonner si la vérification de cette relation n'est pas aussi satisfaisante que la comparaison du rapport v et de la vitesse de la lumière dans le vide.

188. Direction du déplacement électrique. — Considérons une onde plane électromagnétique. Prenons pour plan des xy un plan parallèle à l'onde et choisissons pour axe des x une direction parallèle à celle du moment électromagnétique; nous avons alors $G = 0$, $H = 0$. Quant à F, son expression dépend de la nature de la perturbation; admettons qu'on ait

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt).$$

D'après les équations (III) du chapitre précédent, les composantes de l'induction magnétique, sont alors

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = 0,$$

$$b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = -A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt),$$

$$c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0.$$

L'induction magnétique est donc parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction du moment électromagnétique. Il en est de même de la force magnétique qui a même direction que l'induction puisque les composantes de ces deux quantités ne diffèrent que par un facteur constant μ.

Les composantes de l'induction étant connues les équations (II) permettent de calculer celles de la vitesse du déplacement; nous trouvons

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = A\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt),$$

$$4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0,$$

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

équations qui nous montrent que la vitesse du déplacement est, comme le moment électromagnétique, parallèle à l'axe des x. C'est évidemment aussi la direction du déplacement lui-même, et d'après les équations (VII), celle de la force électromotrice qui le produit.

Ainsi en un point d'une onde plane, le déplacement électrique et le moment électromotrice ont même direction; la force électromotrice et l'induction leur sont perpendiculaires; ces directions sont d'ailleurs situées dans le plan de l'onde.

189. Mais, lorsque les perturbations électromagnétiques sont assez rapides pour donner naissance aux phénomènes lumineux, qu'elle est la direction du déplacement électrique par rapport au plan de polarisation de la lumière ? L'hypothèse de Maxwell sur l'expression de l'énergie kinétique du milieu qui transmet les ondes et l'étude des diverses théories proposées pour l'explication de la réflexion vitreuse nous permettent de répondre facilement à cette question.

Nous savons que dans les théories ordinaires de la lumière, les phénomènes observés dans les milieux isotropes s'interprètent tout aussi bien, soit en admettant, avec Fresnel, que les vibrations de l'éther sont perpendiculaires au plan de polarisation, soit en admettant, comme le font Neumann et Mac-Cullagh, que ces vibrations s'effectuent dans le plan de polarisation. Nous avons montré, en outre, à propos de la réflexion vitreuse (1), que ces deux hypothèses conduisent à des résultats opposés pour la densité de l'éther ; si l'on adopte celle de Fresnel, la densité doit être considérée

(1) *Théorie mathématique de la Lumière*, pp. 320 et suiv.

comme variable ; si l'on prend celle de Neumann et Mac-Cullagh, cette densité est constante.

Mais dans l'une et l'autre théorie l'énergie kinétique a pour valeur

$$\frac{1}{2}\int \rho(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\,d\tau$$

ρ désignant la densité, ξ', η', ζ' les composantes de la vitesse de la molécule d'éther. Suivant Maxwell, l'énergie kinétique n'est autre que le potentiel électrodynamique du système de courants qui existent dans le milieu ; l'expression de cette énergie est donc, dans le cas où le milieu est supposé magnétique (**143**),

$$\frac{1}{8\pi}\int(\alpha a + \beta b + \gamma c)\,d\tau,$$

ou, en exprimant les composantes de l'induction au moyen des composantes de la force électromagnétique,

$$\frac{1}{8\pi}\mu\int(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\tau.$$

Pour faire cadrer la théorie de Maxwell avec la théorie ordinaire de la lumière qui, jusqu'ici, s'est trouvée d'accord avec l'expérience, nous devons admettre que dans ces deux théories les expressions de l'énergie kinétique sont identiques. Nous devons donc avoir

$$\rho = \frac{\mu}{4\pi},$$

$$\xi' = \alpha, \qquad \eta' = \beta, \qquad \zeta' = \gamma.$$

Or, μ étant constant pour un milieu isotrope, la première de ces égalités nous indique que la densité ρ de l'éther doit

être une constante ; nous devons donc adopter l'hypothèse de Neumann et Mac-Cullagh. Mais alors la force électromagnétique, qui, d'après les trois dernières égalités, a même direction que la vibration de la molécule d'éther, est située dans le plan de polarisation. Par conséquent, en nous reportant à ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent nous arrivons à cette conclusion : le déplacement électrique est perpendiculaire au plan de polarisation, si toutefois l'on adopte les hypothèses de Maxwell.

190. Propagation dans un milieu anisotrope. — Double réfraction. — Jusqu'ici nous avons implicitement supposé que le milieu isolant qui propage les perturbations électromagnétiques est isotrope ; cherchons maintenant ce que deviennent les équations du champ lorsque le diélectrique est anisotrope.

Nous avons vu (**78**) que l'analogie de la loi des échanges d'électricité entre les cellules d'un diélectrique avec la loi des échanges de chaleur dans la théorie de Fourier, conduit, si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, aux valeurs suivantes pour les composantes du déplacement électrique dans un milieu anisotrope,

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx} - X\right),$$

$$g = -\frac{K'}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dx} - Y\right),$$

$$h = -\frac{K''}{4\pi}\left(\frac{d\psi}{dz} - Z\right);$$

ψ désigne le potentiel électrostatique, X, Y et Z, les composantes de la force électromotrice due à toute autre cause

qu'une différence de potentiel. En supposant cette force électromotrice due uniquement à l'induction produite par les courants et les aimants du champ, ces égalités deviennent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi}P,\\ g &= \frac{K'}{4\pi}Q,\\ h &= \frac{K''}{4\pi}R. \end{aligned}\right.$$

191. Mais il n'est pas nécessaire pour établir ces formules de s'appuyer sur l'hypothèse de la constitution cellulaire des diélectriques.

D'après les formules (VII) du Chapitre précédent, les composantes du déplacement électrique dans un milieu isotrope sont proportionnelles à celles de la force électromotrice; par suite, l'hypothèse la plus simple qui se présente, est d'admettre que, pour un milieu anisotrope, f, g, h sont des fonctions linéaires et homogènes de P, Q, R,

$$\begin{aligned} f &= AP + BQ + CR,\\ g &= A'P + B'Q + C'R,\\ h &= A''P + B''Q + C''R. \end{aligned}$$

D'ailleurs les neuf coefficients A, B, C,... ne sont pas absolument arbitraires. Montrons en effet qu'ils forment un déterminant symétrique.

Si nous donnons aux composantes du déplacement des accroissements df, dg, dh, le travail correspondant de la force électromotrice est

$$P\,df + Q\,dg + R\,dh,$$

ou, d'après les relations précédentes

$$P\,(A\,dP + B\,dQ + C\,dR) + Q\,(A'dP + B'dQ + C'dR) + R\,(A''dP + B''dQ + C''dR),$$

ou encore

$$(AP + A'Q + A''R)\,dP + (BP + B'Q + B''R)\,dQ + (CP + C'Q + C''R)\,dR.$$

Pour qu'il y ait conservation de l'énergie cette expression doit être une différentielle exacte. Cette dernière condition s'exprime par trois égalités dont la première est

$$\frac{d(AP + A'Q + A''R)}{dR} = \frac{d(CP + C'Q + C''R)}{dP};$$

nous en tirons

$$A'' = C.$$

Les deux autres égalités nous donneraient

$$B = A', \qquad C' = B'',$$

ce qui montre bien que le déterminant des coefficients est symétrique

Le nombre de ces coefficients se trouve donc réduit à 6. Par le choix des axes de coordonnées nous disposons des valeurs de trois d'entre eux ; nous pouvons donc faire ce choix de telle sorte que les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale du déterminant se réduisent à zéro ; les valeurs de f, g, h se réduisent alors aux expressions (1).

192. Nous devrions faire, pour les équations qui donnent

les composantes a, b, c de l'induction magnétique en fonction des composantes α, β, γ de la force électromagnétique, la même hypothèse que celle que nous venons d'adopter pour exprimer f, g, h en fonction de P, Q, R. Nous serions ainsi amenés à remplacer les équations (I) du chapitre précédent par trois équations de même forme n'en différant qu'en ce que le coefficient μ aurait dans chacune d'elles une valeur différente μ, μ' μ''. Mais la perméabilité magnétique des corps transparents étant toujours très voisine de l'unité, ce coefficient n'a guère d'influence sur le résultat des calculs. Pour ne pas compliquer inutilement la question nous admettrons que μ est constant et égal à 1.

193. En dérivant les équations (1) par rapport à t, et en remplaçant dans les seconds membres des équations ainsi trouvées, $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ et $\frac{dR}{dt}$ par les valeurs obtenues au § 177, nous avons les relations

$$4\pi u = -K\frac{d^2F}{dt^2},$$

$$4\pi v = -K'\frac{d^2G}{dt^2},$$

$$4\pi w = -K''\frac{d^2H}{dt^2},$$

qui peuvent s'écrire

$$(C)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2F}{dt^2} &= -\frac{1}{K}4\pi u,\\ \frac{d^2G}{dt^2} &= -\frac{1}{K'}4\pi v,\\ \frac{d^2H}{dt^2} &= -\frac{1}{K''}4\pi w. \end{aligned}\right.$$

Nous avons d'ailleurs (167)

$$(D) \quad \begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \end{cases}$$

Enfin, puisque nous avons supposé $\mu = 1$, les équations (III) du § 167 deviennent

$$(E) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{cases}$$

Tels sont les trois groupes d'équations qui permettent de déterminer les valeurs, à un moment quelconque, des éléments d'une perturbation magnétique en un point d'un diélectrique anisotrope, lorsqu'on connaît leurs valeurs initiales.

194. S'il est vrai que la lumière est due à une perturbation de ce genre, ces équations doivent nous conduire à l'explication de la double réfraction que présente la lumière lorsqu'elle traverse un milieu anisotrope. L'étude que nous avons faite de ce phénomène [1], nous permet de montrer qu'il en est bien ainsi, sans entrer dans de longs développements.

[1] *Théorie mathématique de la Lumière*, p. 217 à 318.

Nous savons que si on désigne les composantes du déplacement de la molécule d'éther par ξ, η, ζ dans la théorie de M. Sarrau, par X, Y, Z dans la théorie de Neumann, par u, v, w dans celle de Fresnel, on a les neuf relations (¹)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -au$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -bv$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -cw$$

$$u = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},$$

$$v = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx},$$

$$w = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy},$$

$$X = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz},$$

$$Y = \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx},$$

$$Z = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy},$$

Ces équations deviennent identiques aux groupes (C), (D) et (E) du paragraphe précédent si nous y faisons

$$a = \frac{1}{K}, \qquad b = \frac{1}{K'}, \qquad c = \frac{1}{K''},$$

$$u = 4\pi u, \ldots, \qquad X = \alpha, \ldots, \qquad \xi = F, \ldots,$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 279.

Or les trois théories optiques de Fresnel, de Neumann, et de M. Sarrau expliquent également bien tous les faits observés puisque, jusqu'ici, aucune expérience n'a pu faire préférer l'une à l'autre ; nous pouvons donc être assurés que les groupes d'équations (C), (D), (E), déduits de la théorie de Maxwell, permettront d'expliquer tous les phénomènes connus et ne seront en contradiction avec aucun d'eux

195. En particulier, l'équation des vitesses de propagation des deux ondes planes provenant d'une même onde incidente doit être identique dans la théorie électromagnétique et dans les théories optiques. Dans ces dernières elle est

$$\frac{l^2}{V^2 - a} + \frac{m^2}{V^2 - b} + \frac{n^2}{V^2 - c} = 0,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde; par conséquent elle devient avec les notations de la théorie électromagnétique

$$\frac{l^2}{KV^2 - 1} + \frac{m^2}{K'V^2 - 1} + \frac{n^2}{K''V^2 - 1} = 0.$$

Il en résulte que les vitesses de propagation suivant les axes de coordonnées sont inversement proportionnelles aux racines carrées des pouvoirs inducteurs suivant ces mêmes axes ou, ce qui revient au même, que ces racines carrées sont proportionnelles aux valeurs des indices de réfraction suivant les axes d'élasticité du milieu.

196. Cette relation se trouve assez bien vérifiée pour le soufre cristallisé. Les pouvoirs inducteurs suivant les trois axes d'élasticité d'un cristal de cette substance sont respec-

tivement, d'après M. Boltzmann [1] : 4,773, — 3,970, — 3,811. Les racines carrées de ces nombres : 2,184, — 1,91, — 1,95 diffèrent peu des indices de réfraction correspondant aux mêmes directions : 2,143, — 1,96, — 1,89.

Les autres substances anisotropes étudiées donnent des résultats bien moins satisfaisants. D'après les expériences faites par M. J. Curie [2] sur le quartz, le spath, la tourmaline, béryl, etc., la racine carrée de K est toujours beaucoup plus grande que l'indice de réfraction ; toutefois, conformément à la théorie, les cristaux positifs, comme le quartz, possèdent un pouvoir inducteur plus grand suivant la direction de l'axe optique que suivant une direction perpendiculaire, tandis que pour les cristaux négatifs, comme le spath d'Islande, c'est suivant cette dernière direction que le pouvoir inducteur est le plus grand.

La relation $K = n^2$ n'est donc que très imparfaitement vérifiée. Mais, comme dans le cas des corps isotropes, nous devons faire observer que les conditions que suppose l'établissement de cette relation ne sont pas remplies par les substances étudiées. Plusieurs d'entre elles sont hygrométriques et acquièrent, par la couche d'eau qui les recouvre, une conductibilité qui peut expliquer jusqu'à un certain point les divergences observées. Cette manière de voir se trouve d'ailleurs confirmée par les résultats obtenus pour le soufre, substance remarquable par ses propriétés isolantes et par la difficulté avec laquelle la vapeur d'eau se condense sur sa surface.

[1] *Wiener Sitzungsberichte*, t. LXX, part. II, p. 342, 1874.
[2] *Lumière électrique*, t. XXIX, p. 127, 1888.

197. L'identification des équations des § 193 et 194 nous permet de déterminer les directions relatives des diverses quantités qui définissent le courant de déplacement en un point, et leurs directions par rapport au rayon lumineux et par rapport au plan de polarisation.

Nous savons que les directions ON et OF (*fig.* 33) des vibrations de Neumann et Fresnel sont rectangulaires entre elles et situées dans le plan de l'onde, et que les directions OS et ON des vibrations de M. Sarrau et de Neumann, également perpendiculaires entre elles, sont dans un plan normal au rayon lumineux OR. Or, de l'identité des équations que nous venons de rappeler, il résulte que la vitesse du déplacement électrique est parallèle à la vibration de Fresnel, la force électromagnétique parallèle à celle de Neumann, enfin le moment électromagnétique, et par suite, la force électromotrice parallèles à la vibration de M. Sarrau. Nous en concluons que le déplacement électrique s'effectue dans le plan de l'onde perpendiculairement à la force électromagnétique, et que cette dernière quantité, située dans le plan de l'onde, est perpendiculaire à la direction du rayon lumineux et à la force électromotrice, elle-même normale au rayon. Dans le cas d'un corps isotrope, la direction de ce rayon se confond avec celle de la normale On au plan de l'onde et par conséquent la force électromotrice prend la direction du déplacement comme nous le savions déjà.

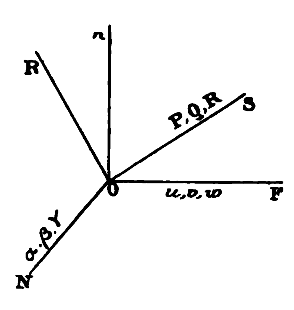


Fig. 33.

Quant aux directions par rapport au plan de polarisation il résulte de ce que nous savons sur la position de ce plan relativement aux vibrations de l'éther que la force électromotrice et le déplacement sont presque normaux au plan de polarisation tandis que la force électromagnétique lui est sensiblement parallèle. Si l'on passe au cas d'un milieu isotrope ces quantités deviennent rigoureusement perpendiculaires ou parallèles au plan de polarisation.

198. Propagation dans un milieu imparfaitement isolant. — Absorption de la lumière. — Nous avons dans ce cas le choix entre les formules (IX) de Maxwell et les formules (X) de M. Potier (**170** et **171**). Ces deux groupes de formules conduisant aux mêmes résultats, prenons celles de Maxwell et cherchons quel est alors le mode de propagation d'une onde plane électromagnétique.

Si nous prenons le plan des xy parallèle au plan de l'onde et l'axe des x, parallèle à la direction du moment électromagnétique, nous avons $G = H = o$, et les équations (1) du § 177 se réduisent à la première

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{d^2F}{dt^2};$$

d'où nous tirons :

$$P = -\frac{dF}{dt}$$

en négligeant la constante d'intégration qui doit être nulle lorsque les perturbations sont périodiques. En portant ces valeurs dans la première des équations (IX) de Maxwell

$$u = CP + \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt},$$

nous obtenons :

$$(1) \qquad u = -C\frac{dF}{dt} - \frac{K}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}.$$

Mais les groupes d'équations (I), (II), (III) du § 167 nous donnent :

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2}\right),$$

ou, puisque, par suite du choix des axes de coordonnées, F ne dépend pas de y

$$4\pi u = -\frac{1}{\mu}\frac{d^2F}{dz^2};$$

nous avons donc en éliminant u entre l'équation (1) et cette dernière

$$(2) \qquad \frac{d^2F}{dz^2} = \mu K\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt}.$$

Cette équation est satisfaite par une fonction périodique du temps de la forme

$$F = e^{i(nt-mz)}$$

pourvu que les coefficients n et m satisfassent à la relation

$$m^2 = \mu K n^2 - 4\pi\mu C n i.$$

Mais n ayant pour valeur $\frac{2\pi}{T}$, T désignant la période de la fonction, cette quantité est réelle; par suite m^2 est une quantité essentiellement imaginaire. Il en est de même de m et

nous pouvons poser

$$m = q - pi.$$

En portant cette valeur de m dans l'égalité précédente et en écrivant qu'il y a égalité entre les parties réelles et les parties imaginaires nous obtenons les deux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} q^2 - p^2 = \mu K n^2 \\ 2pq = 4\pi\mu C n \end{cases}$$

La fonction périodique satisfaisant à l'équation (2) peut alors s'écrire

$$F = e^{-pz} e^{i(nt - qz)},$$

dont la partie réelle, la seule qui nous intéresse au point de vue des conséquences expérimentales, est :

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz).$$

199. Si l'on fait abstraction des variations de F résultant du facteur cos $(nt - qz)$, cette expression nous montre que la valeur du moment électromagnétique varie comme l'exponentielle e^{-pz}. Or d'après la seconde des équations de condition (3), p et q sont de même signe ; par suite, si la direction de propagation de l'onde plane considérée est celle des z positifs, p et q sont positifs et e^{-pz} décroît quand z augmente. La valeur du moment électromagnétique diminue donc à mesure que l'onde pénètre plus profondément dans le milieu considéré.

Il en est de même pour le déplacement électrique et la force électromagnétique puisque les valeurs de ces quantités

se déduisent de celles du moment électromagnétique par une suite d'équations différentielles linéaires et du premier ordre qui laissent subsister dans leurs expressions le facteur e^{-pz}.

Il en est encore ainsi pour la vitesse de déplacement d'une molécule d'éther luminifère puisque nous avons vu (**189**) que cette vitesse est proportionnelle à la force électromagnétique.

Par conséquent, lorsque les perturbations magnétiques seront assez rapides pour donner lieu aux phénomènes lumineux, l'intensité de la lumière, proportionnelle au carré de la vitesse moyenne d'une molécule d'éther, devra varier comme e^{-2pz}.

200. Dans le cas où la substance considérée possède un pouvoir inducteur spécifique très faible et une perméabilité magnétique voisine de 1, la valeur de p, déduite des équations (3) montre que cette quantité est sensiblement proportionnelle à la racine carrée de C. Il résulte donc de ce qui précède que l'intensité de la lumière transmise par un tel milieu est d'autant plus faible que C est plus grand; en d'autres termes, plus un corps est conducteur pour l'électricité, plus il est opaque pour la lumière.

Il y a un grand nombre d'exceptions à cette règle. Toutefois, d'une manière générale, les corps solides transparents sont de bons isolants tandis que les corps solides conducteurs sont très opaques. En outre, il résulte des recherches de M. J. Curie [1] sur les diélectriques que la liste de ces corps rangés par ordre de conductibilité croissante est presque identique à celle de ces mêmes corps rangés par ordre de

[1] *Lumière électrique*, t. XXIX, p. 322 ; 1888.

diathermanéité décroissante. Voici ces deux listes ; celle des pouvoirs diathermanes est déduite des travaux de Melloni.

Conductibilité électrique croissant du premier au dernier	*Pouvoir diathermane décroissant du premier au dernier*
Soufre.	Sel gemme.
Sel gemme.	Soufre.
Fluorine.	Fluorine.
Spath d'Islande.	Spath d'Islande.
Quartz.	Quartz.
Barytine.	Verre.
Alun.	Barytine.
Verre.	Tourmaline foncée.
Tourmaline foncée.	Alun.

On pourrait encore citer l'ébonite qui a été signalée comme se laissant facilement traverser par les radiations obscures.

201. Contrairement à la loi précédente les électrolytes sont bons conducteurs de l'électricité et généralement transparents. Maxwell explique ce fait en faisant observer que la conductibilité des électrolytes n'est pas de même nature que celle des métaux. Dans ceux-ci les molécules matérielles sont en repos ; et l'électricité seule est en mouvement ; dans les électrolytes, au contraire, les ions se meuvent d'une électrode à l'autre et le transport de l'électricité s'effectue par les ions qui deviennent ainsi les *convecteurs* de l'électricité.

On peut en trouver une autre explication qui a été également donnée par Maxwell. L'énergie absorbée par le passage de l'onde à travers la substance doit se retrouver nécessairement sous une forme quelconque. Dans les métaux elle se

transforme en chaleur. Dans les électrolytes elle sert à effectuer la séparation des ions. Mais le sens du mouvement des ions dépend de celui du mouvement électrique ; par suite, l'effet produit par le passage d'une certaine quantité d'électricité dans un sens se trouve détruit par le passage d'une même quantité en sens inverse et une succession de courants alternatifs comme ceux qui résultent des perturbations capables de produire la lumière ne peut donner lieu à une décomposition. Il n'y a donc pas d'énergie absorbée et l'intensité lumineuse à la sortie d'un électrolyte doit être sensiblement égale à l'intensité de la lumière incidente.

202. Maxwell a fait quelques expériences pour vérifier quantitativement si l'intensité lumineuse décroît bien comme l'exponentielle e^{-2pz}. Il a opéré sur le platine, l'or, l'argent qui, réduits en lames très minces, laissent passer la lumière. Il semble résulter que la transparence de ces corps est beaucoup plus grande que ne le voudrait la théorie. Mais ce résultat s'explique facilement ; l'épaisseur des lames n'est pas uniforme et une forte proportion de la lumière transmise traverse une épaisseur beaucoup plus faible que la valeur de z prise dans le calcul de l'exponentielle.

203. Réflexion des ondes. — Les lois de la réflexion de la lumière peuvent se déduire des équations du champ magnétique. Dans une note publiée dans la traduction française du traité de Maxwell (t. II, p. 507), M. Potier a montré qu'on retrouve ainsi les formules données par Fresnel pour la réflexion vitreuse et celles de Cauchy et Lamé pour la réflexion métallique. Ces formules ayant été vérifiées par l'expérience, leur déduction de la théorie de Maxwell est une

nouvelle confirmation de cette théorie. Cependant, les valeurs numériques des constantes, déterminées par les méthodes optique et électrique ne concordent pas ; le désaccord notable pour les diélectriques transparents est encore plus marqué pour les métaux. En particulier la réflexion de la lumière sur le fer devrait différer, d'après la théorie de Maxwell, de la réflexion sur les autres métaux puisque le coefficient de perméabilité magnétique du fer est environ 30 fois plus grand que celui de la plupart des métaux ; or l'expérience n'a, jusqu'ici, révélé aucune particularité dans les lois de la réflexion sur le fer.

Cette divergence peut s'expliquer si l'on suppose que l'induction magnétique est un phénomène qui n'est pas instantané. Avec des vibrations extrêmement rapides, le phénomène n'aurait pas le temps de se produire.

On pourrait invoquer un argument à l'appui de cette manière de voir. Les expériences de M. Fizeau sur la vitesse de propagation de l'électricité à travers un fil ont prouvé que cette vitesse est plus faible dans le fer que dans le cuivre. Cela s'explique aisément : car grâce au phénomène de l'aimantation transversale qui se produit dans un fil de fer parcouru par un courant, la self-induction du fer est plus grande que celle du cuivre.

Au contraire, les expériences de Hertz donnent pour la vitesse dans le fer la même valeur que pour la vitesse dans le cuivre, comme si, dans ces alternances extrêmement rapides réalisées par l'illustre physicien de Carlsruhe, le fer n'avait pas le temps de se magnétiser par induction. « Auch Eisendrähte machen keine Ausnahme von der allgemeinen Regel, die Magnetisirbarkeit des Eisens kommt also bei so

schnellen Bewegungen nicht in Betracht (Hertz, *Wiedemann's Annalen*, t. XXXIV, page 558).

204. Énergie de la radiation. — Dans les théories ordinaires des phénomènes lumineux, le milieu qui transmet la lumière renferme de l'énergie sous forme d'énergie potentielle et sous forme d'énergie kinétique ; l'énergie potentielle est due à la déformation du milieu, supposé élastique ; l'énergie kinétique résulte de son mouvement vibratoire. L'énergie totale d'un élément de volume reste constante et par suite. quand l'énergie potentielle varie, l'énergie kinétique varie en sens inverse d'une quantité égale.

Dans la théorie électromagnétique, on suppose également que l'énergie du milieu est en partie potentielle, en partie kinétique. L'énergie potentielle, due aux actions électrostatiques, a pour expression (**32**).

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau ;$$

l'énergie kinétique est le potentiel électrodynamique du système de courants développés dans le milieu, c'est-à-dire (**144**),

$$T = \int \frac{1}{8\pi} (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, d\tau .$$

Cherchons les valeurs de ces deux quantités dans le cas d'une onde plane parallèle au plan des xy et dans laquelle le moment électromagnétique est dirigé parallèlement à l'axe

des x. Nous avons alors, d'après le § 181,

$$G = H = 0, \qquad Q = R = 0, \qquad g = h = 0,$$
$$\alpha = \gamma = 0, \qquad a = c = 0,$$

et les expressions des deux formes de l'énergie deviennent

$$W = \int \frac{2\pi}{K} f^2,$$

$$T = \int \frac{1}{8\pi\mu} b^2.$$

Mais les équations (VII) et (III) du champ électromagnétique nous donnent

$$f = \frac{K}{4\pi} P = -\frac{K}{4\pi} \frac{dF}{dt},$$
$$b = \frac{dF}{dz};$$

de sorte que nous avons pour les valeurs de l'énergie potentielle et de l'énergie kinétique rapportées à l'unité de volume

(1) $$W = \frac{K}{8\pi} \left[\frac{dF}{dt}\right]^2,$$

(2) $$T = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{dF}{dz}\right]^2.$$

La fonction F, devant satisfaire à l'équation différentielle (180),

$$K\mu \frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dz^2},$$

est de la forme

$$F = f(z - Vt),$$

où

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}};$$

nous avons donc

$$\frac{dF}{dt} = - Vf'(z - Vt),$$

$$\frac{dF}{dz} = f'(z - Vt),$$

et par conséquent

$$K\left[\frac{dF}{dt}\right]^2 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{dF}{dz}\right]^2$$

Les valeurs (1) et (2) des deux formes de l'énergie sont donc égales entre elles; quand l'une d'elles varie, l'autre varie dans le même sens de la même quantité. Nécessairement, puisqu'il y a conservation de l'énergie dans le système tout entier, l'énergie perdue dans un élément de volume doit se retrouver dans un autre élément. Ces conséquences diffèrent de celles des théories ordinaires de la lumière que nous avons rappelées en commençant.

205. Tensions et pressions dans le milieu qui transmet la lumière. — Nous avons vu (**81**) que dans un milieu diélectrique en équilibre contraint, un élément de surface perpendiculaire aux lignes de force subit une tension normale dont la valeur par unité de surface est égale au produit de $\frac{K}{8\pi}$ par le carré de la force électromotrice, tandis que sur les

éléments parallèles aux lignes de force s'exercent des pressions qui, rapportées à l'unité de surface, ont la même valeur que cette tension. Si donc nous prenons l'axe des x parallèle aux lignes de force et si avec Maxwell, nous convenons de représenter les pressions par des quantités négatives, nous aurons pour les valeurs des tensions et des pressions, par unité de surface, qui s'exercent sur des éléments perpendiculaires aux axes de coordonnées,

$$P_{xx} = \frac{K}{8\pi} P^2, \qquad P_{yy} = -\frac{K}{8\pi} P^2, \qquad P_{zz} = -\frac{K}{8\pi} P^2.$$

Mais, avec ce système d'axes, l'énergie électrostatique rapportée à l'unité de volume a pour valeur

$$W = \frac{2\pi}{K} f^2 = \frac{K}{8\pi} P^2;$$

par conséquent les tensions et pressions par unité de surface sur les éléments considérés sont égales à l'énergie électrostatique par unité de volume.

206. La loi des attractions et des répulsions étant la même pour les masses électriques et les masses magnétiques nous devons nous attendre à trouver des tensions et des pressions analogues aux précédentes dans le champ magnétique. Maxwell traite le cas général où il existe dans le champ des aimants et des courants. La méthode qu'il emploie est sujette à des objections. Mais il est inutile d'envisager le cas général puisque, d'après l'hypothèse d'Ampère, le magnétisme permanent s'explique par des courants particulaires. Nous pouvons donc supposer qu'il n'y a que des courants circulant

dans un milieu dont la perméabilité magnétique est égale à 1 ; nous y gagnerons en rigueur et en concision.

Considérons un élément de volume $d\tau$, et soient u, v, w les composantes de la vitesse de l'électricité au point qu'il occupe. D'après notre hypothèse, l'induction magnétique en ce point se confond avec la force électromagnétique et les formules (2) du § 160, qui donnent les composantes de la force électrodynamique rapportées à l'unité de volume deviennent

$$X = \gamma v - \beta w,$$
$$Y = \alpha w - \gamma u,$$
$$Z = \beta u - \alpha v.$$

Les composantes u, v, w de la vitesse de l'électricité étant liées à celles de la force électromagnétique par les équations (II) (**167**) la première des équations précédentes peut s'écrire

$$4\pi X = \gamma\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) - \beta\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right),$$

ou, en ajoutant et retranchant au second membre le produit

$$\alpha\frac{d\alpha}{dx},$$

$$4\pi X = \alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy} + \gamma\frac{d\alpha}{dz} - \alpha\frac{d\alpha}{dx} - \beta\frac{d\beta}{dx} - \gamma\frac{d\gamma}{dx}.$$

Mais, puisque la force électromagnétique est égale à l'induction magnétique, la relation qui lie les composantes de cette dernière quantité (**102**)

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0,$$

devient

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0\,;$$

nous pouvons donc ajouter le produit $\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)$ au second membre de la relation qui donne $4\pi X$ sans en changer la valeur, et nous avons

$$4\pi X=\alpha\frac{d\alpha}{dx}+\beta\frac{d\alpha}{dy}+\gamma\frac{d\alpha}{dz}-\alpha\frac{d\alpha}{dx}-\beta\frac{d\beta}{dx}-\gamma\frac{d\gamma}{dx}$$
$$+\alpha\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\frac{d\beta}{dy}+\alpha\frac{d\gamma}{dz}.$$

En rangeant convenablement les termes du second membre, on voit que l'on peut écrire

$$4\pi X=\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{2}\right)+\frac{d}{dy}(\alpha\beta)+\frac{d}{dz}(\alpha\gamma),$$

et de même

$$4\pi Y=\frac{d}{dx}(\beta\alpha)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\beta^2-\gamma^2-\alpha^2}{2}\right)+\frac{d}{dz}(\beta\gamma),$$
$$4\pi Z=\frac{d}{dx}(\alpha\beta)+\frac{d}{dy}(\gamma\beta)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}{2}\right).$$

207. Supposons maintenant que les forces électrodynamiques soient dues à des pressions ou tensions résultant de l'élasticité du milieu et désignons les composantes des tensions par

$P_{xx}d\omega$, $P_{xy}d\omega$, $P_{xz}d\omega$, pour un élément normal à l'axe des x,
$P_{yx}d\omega$, $P_{yy}d\omega$, $P_{yz}d\omega$, pour un élément normal à l'axe des y,
$P_{zx}d\omega$, $P_{zy}d\omega$, $P_{zz}d\omega$, pour un élément normal à l'axe des z.

Un parallélipipède élémentaire de volume $d\tau$ et dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées doit être en équilibre sous l'action de ces neuf forces et des trois composantes $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$ de la force électrodynamique. En écrivant que ce parallélipipède ne peut prendre aucun mouvement de rotation autour d'un quelconque des axes de coordonnées, nous obtenons les relations

$$P_{xy} = P_{yx}, \qquad P_{yz} = P_{zy}, \qquad P_{zx} = P_{xz};$$

et en écrivant qu'il ne peut y avoir translation suivant ces mêmes axes, nous avons

$$X = \frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz},$$
$$Y = \frac{dP_{xy}}{dx} + \frac{dP_{yy}}{dy} + \frac{dP_{zy}}{dz},$$
$$Z = \frac{dP_{xz}}{dx} + \frac{dP_{yz}}{dy} + \frac{dP_{zz}}{dz}.$$

L'identification de ces valeurs de X, Y, Z avec celles que l'on déduit des équations obtenues dans le paragraphe précédent, nous donne :

$$P_{xx} = \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2),$$
$$P_{yy} = \frac{1}{8\pi}(\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2),$$
$$P_{zz} = \frac{1}{8\pi}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2),$$

$$P_{xy} = P_{yx} = \frac{\alpha\beta}{4\pi},$$
$$P_{yz} = P_{zy} = \frac{\beta\gamma}{4\pi},$$
$$P_{zx} = P_{xz} = \frac{\gamma\alpha}{4\pi}.$$

Lorsqu'on prend les axes de coordonnées de telle sorte que l'axe des x soit parallèle à la force magnétique, on a $\beta = \gamma = 0$, et par conséquent les six dernières composantes des tensions que nous venons de calculer sont nulles. Les trois premières deviennent

$$P_{xx} = \frac{\alpha^2}{8\pi}, \qquad P_{yy} = -\frac{\alpha^2}{8\pi}, \qquad P_{zz} = -\frac{\alpha^2}{8\pi}.$$

Un élément perpendiculaire aux lignes de force magnétiques éprouve donc une tension normale et les éléments parallèles à ces lignes de force, des pressions normales. Les valeurs de cette tension et de ces pressions rapportées à l'unité de surface, sont égales entre elles. Elles sont aussi égales à l'énergie électrodynamique par unité de volume puisque cette énergie devient, par suite du choix des axes de coordonnées,

$$T = \frac{\alpha^2}{8\pi}.$$

208. Appliquons ces résultats au cas d'un milieu transmettant des ondes planes, en prenant le plan des xy parallèle à l'onde et l'axe des x parallèle au moment électromagnétique.

La force électromotrice ayant même direction que le moment électromagnétique les lignes de forces électriques sont parallèles à l'axe des x; un élément perpendiculaire à cet axe subit donc une tension normale dont la valeur par unité de surface est égale à l'énergie électrostatique W rapportée à l'unité de volume. Mais les lignes de force magnétiques sont perpendiculaires aux lignes de force électriques puisque la force électromagnétique et la force électromotrice sont rectangulaires entre elles; par suite, l'élément considéré est parallèle

aux lignes de force magnétique, et, de ce fait, il éprouve une pression normale dont la valeur par unité de surface est égale à l'énergie électrodynamique T rapportée à l'unité de volume. Ces deux quantités W et T étant toujours égales entre elles (**204**), la pression et la tension qui s'exercent sur l'élément se compensent.

On verrait qu'il en est de même pour un élément perpendiculaire à l'axe des y.

Pour un élément perpendiculaire à l'axe des z, c'est-à-dire parallèle au plan de l'onde, la pression électrostatique s'ajoute à la pression électromagnétique, de sorte que la pression totale par unité de surface est égale à l'énergie totale par unité de volume.

209. Maxwell a calculé la pression qui s'exerce sur une surface éclairée par le soleil. En admettant que l'énergie de la lumière qu'un fort rayon de soleil envoie sur un espace d'un mètre carré est de 124,1 kilogrammètres par seconde, l'énergie moyenne contenue dans un mètre cube de l'espace traversé par le rayon est d'environ $41,36 \times 10^{-8}$ kilogrammètres; par suite la pression moyenne par mètre carré est $41,36 \times 10^{-8}$ kilogrammes ou $0^{gr},0004136$.

La moitié de cette pression étant égale à l'énergie électrostatique et à l'énergie électrodynamique, il est facile d'obtenir les valeurs de la force électromotrice par unité de longueur et de la force électromagnétique. Maxwell a trouvé que la force électromotrice est d'environ 600 volts par mètre et que la force électromagnétique est 0,193 en mesure électromagnétique, soit un peu plus du dixième de la composante horizontale du champ magnétique terrestre en Angleterre.

210. Interprétation des pressions électrodynamiques. — Nous avons fait remarquer (**84**) que l'existence des pressions électrostatiques s'accordait mal avec l'hypothèse fondamentale de la localisation de l'énergie dans le milieu diélectrique. Les pressions électrodynamiques s'interprètent plus facilement et dans un mémoire publié dans le *Philosophical Magazine* (¹), Maxwell en a donné une explication qui présente un certain intérêt.

L'énergie électrodynamique $\int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} d\tau$ étant supposée de l'énergie kinétique nous pouvons regarder le milieu dans lequel s'effectuent les phénomènes électrodynamiques comme constitué par des molécules animées de mouvements de rotation. Si α', β', γ' sont les composantes du mouvement de rotation d'une des molécules supposée libre, l'énergie kinétique résultant de ce mouvement est proportionnelle à $\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2}$. Il est donc possible d'identifier l'expression de l'énergie électrodynamique avec celle de l'énergie du milieu tourbillonnant en prenant les composantes de la rotation proportionnelles à celles de la force électromagnétique. La direction de cette force devient alors celle de l'axe de rotation de la molécule.

Si nous supposons cette molécule sphérique, elle tendra à s'aplatir aux pôles et à se renfler à l'équateur. Un élément de surface perpendiculaire à l'axe de rotation se trouvera sollicité par une force normale dirigée vers le centre de la molécule ; au contraire, un élément situé sur l'équateur paral-

(¹) *Phil. Mag.* ; années 1861 et 1862.

lèlement à l'axe subira une force normale dirigée vers l'extérieur de la molécule tournante. Comme l'axe de rotation a même direction que la force magnétique, un élément perpendiculaire à cette force est donc soumis à une tension, tandis qu'un élément parallèle est soumis à une pression. La différence algébrique entre les valeurs de cette pression et de cette tension est due à la force centrifuge; elle est proportionnelle à $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$, c'est-à-dire au double de l'énergie kinétique. Nous retrouvons donc bien les résultats du § 207.

Dans son mémoire, Maxwell suppose que la rotation des molécules magnétiques se transmet de l'une à l'autre au moyen d'un mécanisme de connexion formé de petites molécules sphériques dont le rôle peut être assimilé à celui d'engrenages. L'induction magnétique est alors due à l'inertie des sphères tournantes, la force électromotrice est l'effort exercé sur le mécanisme de connexion, enfin le déplacement de l'électricité est le déplacement résultant des déformations de ce mécanisme.

CHAPITRE XII

POLARISATION ROTATOIRE MAGNÉTIQUE

211. Lois du phénomène. — La rotation du plan de polarisation de la lumière sous l'influence d'un champ magnétique créé par des aimants ou des courants est le phénomène le plus remarquable de ceux qui mettent en évidence les actions réciproques de la lumière et de l'électricité.

Découverte par Faraday en 1845, la polarisation rotatoire magnétique a été ensuite étudiée par Verdet qui a établi les lois suivantes :

1° La rotation du plan de polarisation d'une lumière simple est proportionnelle à l'épaisseur du milieu traversé par le rayon ; elle varie à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde de la lumière employée ;

2° Elle est proportionnelle à la composante de l'intensité du champ magnétique suivant la direction du rayon ; la rotation est donc maximum quand la direction du rayon coïncide avec celle du champ ; elle varie comme le cosinus de l'angle formé par ces deux directions lorsqu'elles ne coïncident pas ;

3° Sa grandeur et son sens dépendent de la nature du milieu. Les corps diamagnétiques dévient le plan de polarisation dans le sens du courant qui, tournant autour du rayon, donnerait au champ sa direction actuelle ; les corps magnétiques, comme les dissolutions de perchlorure de fer dans l'alcool ou l'éther donnent une rotation inverse. Toutefois cette dernière loi présente quelques exceptions ; ainsi le chromate neutre de potasse, quoique diamagnétique, produit comme le perchlorure de fer une rotation de sens inverse à celui du courant.

212. Une différence importante distingue la polarisation rotatoire magnétique de la polarisation rotatoire que présente naturellement certaines substances cristallisées comme le quartz, et plusieurs liquides comme l'essence de thérébentine.

Dans ce dernier phénomène la rotation au plan de polarisation est encore proportionnelle à l'épaisseur de la substance traversée, mais le sens de cette rotation change en même temps que la direction de propagation du rayon ; en d'autres termes le sens de rotation reste toujours le même pour un observateur qui se place de manière à recevoir le rayon de lumière. Par suite les plans de polarisation de deux rayons traversant, suivant des directions opposées, une même épaisseur d'une substance active, subissent des déviations égales mais de sens inverses. Il en résulte que si un rayon polarisé rectilignement, après avoir traversé une substance, est réfléchi sur lui-même de manière à la traverser une seconde fois en sens inverse, le plan de polarisation de la lumière émergente se confond avec celui de la lumière incidente.

Dans la polarisation rotatoire magnétique le sens de la rotation est indépendant de la direction du rayon; il ne dépend, pour une substance déterminée, que de la direction du champ magnétique. Un rayon lumineux que l'on fait passer deux fois en sens inverses à travers cette substance au moyen d'une réflexion subit donc une rotation double de celle qui résulterait d'un seul passage.

Cette propriété a été mise à profit pour augmenter considérablement la rotation observée en faisant traverser plusieurs fois la substance par le même rayon S, à l'aide de deux miroirs

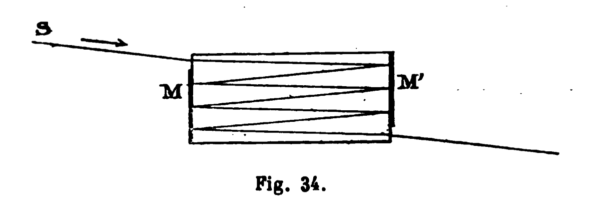


Fig. 34.

plans M et M' (*fig.* 34) disposés presque normalement à la direction du rayon. Cet artifice et l'emploi d'un champ magnétique très puissant ont permis à M. H. Becquerel et à M. Bichat de découvrir presque simultanément le pouvoir rotatoire des gaz qui avait échappé aux observations de Faraday et de Verdet.

213. Essais d'explication de la polarisation rotatoire magnétique. — Avant Maxwell plusieurs tentatives avaient été faites dans le but d'expliquer la rotation du plan de polarisation sous l'influence d'un champ magnétique.

Dès l'année qui suivit la découverte de Faraday, Airy [1]

[1] *Philosophical Magazine*, juin 1846.

proposa plusieurs formules exprimant cette rotation en fonction de la longueur d'onde dans le vide de la lumière employée et de l'indice de réfraction de la substance pour cette lumière. Airy avait été conduit à ces formules par les travaux antérieurs de Mac-Cullagh sur la polarisation rotatoire du quartz. Comme nous l'avons vu dans un autre ouvrage [1] la rotation du plan de polarisation d'un rayon se propageant suivant l'axe du cristal s'explique par l'addition de certaines dérivées du troisième ordre des composantes du déplacement d'une molécule d'éther aux seconds membres des équations du mouvement de cette molécule; ces équations deviennent alors, si l'on prend pour axe des z la direction du rayon lumineux,

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dz^2} + a \frac{d^3\eta}{dz^3},$$

$$\rho \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dz^2} - a \frac{d^3\xi}{dz^3}.$$

En substituant aux dérivées du troisième ordre, par rapport à z, les dérivées du même ordre prises par rapport à z et à t, $+\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$ et $-\frac{d^3\xi}{dz^2dt}$, Airy obtint la formule

$$\theta = m \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{dt}\right) \qquad \text{(I)}$$

où m est un coefficient dépendant de l'intensité du champ magnétique, λ la longueur d'onde dans le vide, i l'indice de réfraction. La substitution de dérivées du troisième ordre

[1] *Théorie mathématique de la lumière*, p. 182.

prise uniquement par rapport au temps $+\frac{d^3\eta}{dt^3}$ et $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$, le conduisit à une autre formule

$$\text{(II)} \qquad \theta = m\frac{1}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{dt}\right).$$

Enfin, en prenant les dérivées du premier ordre par rapport au temps $+\frac{d\eta}{dt}$ et $-\frac{d\xi}{dt}$, il arriva à une troisième formule

$$\text{(III)} \qquad \theta = m\left(i - \lambda\frac{di}{dt}\right).$$

214. Quoique très différentes, ces formules rendaient compte des faits observés par Faraday qui n'avait fait aucune mesure quantitative. Ce physicien avait seulement démontré que la rotation dépend de la nature de la radiation en constatant qu'avec la lumière blanche, l'image donnée par l'analyseur présente des colorations rapidement variables avec la position de la section principale de celui-ci ; toute formule contenant la longueur d'onde était donc acceptable. En 1847, M. Ed. Becquerel [1] eut l'idée de comparer le phénomène de Faraday à la polarisation rotatoire présentée par l'eau sucrée ; il trouva que ces deux phénomènes étaient absolument analogues ; par suite la loi de Biot semblait applicable à la polarisation rotatoire magnétique, c'est-à-dire que la rotation devait être en raison inverse du carré de la longueur d'onde. La formule (III) qui est loin de remplir cette condition devait donc être rejetée.

Des expériences directes, faites avec le plus grand soin,

[1] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XXI, p. 952.

furent entreprises par Verdet, en 1863, pour mesurer la rotation du plan de polarisation de radiations simples, de longueurs d'onde connues, sous l'influence d'un champ magnétique; leurs résultats furent comparés aux valeurs fournies par chacune des formules précédentes dans lesquelles le coefficient m était déterminé au moyen des données d'une expérience. Comme on devait s'y attendre d'après les résultats de M. Becquerel, la formule (III) donne des nombres s'écartant beaucoup de ceux fournis par l'expérience ; la formule (II) convient mieux, mais la formule (I) est celle qui est préférable ; en particulier, pour le sulfure de carbone, les nombres donnés par cette dernière formule ne diffèrent des résultats de l'expérience que d'une quantité de l'ordre de l'erreur expérimentale. Des trois formules proposée par Airy la première est donc la seule à conserver.

215. Mais, si la concordance de la formule (I) avec l'expérience justifie l'introduction des dérivées $+\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$ et $-\frac{d^3\xi}{dz^2dt}$ dans les seconds membres des équations du mouvement d'une molécule d'éther, aucune considération théorique ne préside au choix de ces dérivées, à l'exclusion des autres; on ne possédait donc pas encore de théorie de la polarisation rotatoire magnétique. Il est vrai que Airy n'avait pas proposé ses formules comme donnant une explication mécanique de la rotation du plan de polarisation mais seulement, dit-il, « pour faire voir quelle peut être expliquée par des équations qui semblent de nature à pouvoir se déduire de quelque hypothèse mécanique plausible, quoique l'on n'ait pas encore formulé cette hypothèse. »

Quelques années avant les expériences de Verdet, M. Ch.

Neumann (1) avait tenté de combler cette lacune. Neumann suppose que les molécules du fluide électrique des courants particulaires qui, d'après Ampère, prennent naissance à l'intérieur d'un corps aimanté agissent sur les molécules d'éther; en outre il admet que ces actions réciproques, comme celles qui s'exercent entre deux molécules électriques dans la théorie de Weber, sont modifiées par le mouvement relatif de ces molécules. Il résulte de ces hypothèses qu'une molécule d'éther est soumise non seulement aux forces résultant de l'élasticité de l'éther, mais encore à des forces, variables avec le temps, provenant des actions des molécules électriques voisines. Neumann démontre que la résultante de ces dernières forces est à chaque instant proportionnelle à la vitesse de la molécule d'éther et à la force magnétique et perpendiculaire au plan de ces deux directions. Par conséquent, si nous considérons une onde plane se propageant suivant la direction du champ magnétique, et si nous prenons le plan des xy parallèle à l'onde, les composantes suivant les axes des x et des y, de cette résultante auront respectivement pour valeurs

$$+ a \frac{d\eta}{dt} \qquad \text{et} \qquad - a \frac{d\xi}{dt},$$

a étant un coefficient proportionnel à l'intensité du champ. Nous aurons donc pour les équations du mouvement d'une molécule d'éther

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dz^2} + a \frac{d\eta}{dt},$$
$$\rho \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dz^2} - a \frac{d\xi}{dt}.$$

(1) *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.* Halle, 1863.

Ces équations ne diffèrent des équations de Mac-Cullagh (213) que par la substitution des dérivées de η et ξ par rapport à t aux dérivées du troisième ordre de ces mêmes quantités par rapport à z ; par suite elles doivent conduire pour la valeur de la rotation du plan de polarisation à la formule (III), formule en complet désaccord avec l'expérience. La théorie de Neumann, bien que remarquable par la simplicité des hypothèses, doit donc être rejetée.

216. Théorie de Maxwell. — Ainsi, au moment où Maxwell écrivait son Traité, il était reconnu que la théorie de Neumann conduisait à une formule en complète contradiction avec les résultats expérimentaux, et que, des formules proposées par Airy, la formule (I) était celle qui s'accordait le mieux avec ces résultats. Il suffisait donc, pour obtenir une théorie acceptable de la polarisation rotatoire magnétique, d'expliquer par des hypothèses plausibles, l'addition des dérivées $+\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$ et $-\frac{d^3\xi}{dz^2dt}$ aux équations du mouvement d'une molécule d'éther dans un milieu isotrope.

Faisons observer que l'introduction de ces dérivées dans les équations du mouvement peut, indépendamment de toute idée théorique, s'effectuer de deux manières différentes.

Pour le montrer rappelons en quelques mots comment on arrive aux équations du mouvement d'une molécule d'éther dans un milieu isotrope ([1]). Si nous appelons U la fonction des forces qui résultent de l'élasticité de l'éther lorsqu'un ébranlement se propage dans ce milieu, le mouvement d'une molécule de masse m subissant un déplacement ξ suivant

([1]) *Théorie mathématique de la lumière*, pp. 1 à 48 et 176 à 182.

l'axe des x, est donné par l'équation

$$(1) \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi};$$

si ξ n'est qu'une des composantes du déplacement et η, et ζ les deux autres composantes, nous aurions en outre deux équations analogues. Lorsqu'on admet que les forces qui s'exercent entre les molécules n'agissent qu'à des distances excessivement petites, la fonction U peut s'écrire

$$U = \int W d\tau,$$

W étant la valeur de la fonction des forces, rapportée à l'unité de volume, au point occupé par l'élément $d\tau$, et l'intégrale étant étendue à tout l'espace occupé par l'éther. L'étude de W montre que c'est une fonction des dérivées partielles des divers ordres de ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées x, y, z, et, par diverses transformations, on arrive à mettre les équations du mouvement (1) sous la forme

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\sum\frac{d}{dx}\frac{dW}{d\xi'} + \sum\frac{d}{dx^2}\frac{dW}{d\xi''} - \cdots;$$

ξ' étant l'une quelconque des dérivées de ξ par rapport à x, y, z; ξ'' une quelconque des dérivées secondes de ξ par rapport à ces mêmes variables. Ces équations nous montrent que les termes de W qui ne contiennent ces dérivées qu'à la première puissance doivent disparaître lorsqu'on suppose les déplacements périodiques. Par conséquent, si nous négligeons les termes du troisième degré par rapport à ces dérivées et si nous désignons par W_2 l'ensemble des termes du second degré, l'équation

précédente devient

$$(2) \qquad \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\sum \frac{d}{dx} \frac{dW_2}{d\xi'} + \sum \frac{d}{dx^2} \frac{dW_2}{d\xi''}.$$

En général, le second membre de cette équation contient des dérivées de ξ, η, ζ, par rapport à x, y, z, de tout ordre à partir du second, mais pour les milieux isotropes les dérivées d'ordre impair disparaissent. Cette équation se simplifie encore dans ce cas, lorsqu'on considère une onde plane perpendiculaire à l'axe des z ; il ne reste plus que les dérivées d'ordre pair de ξ par rapport à z. L'équation précédente peut alors s'écrire

$$(3) \qquad \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\xi}{dz^4} + \cdots$$

Les deux autres équations du mouvement s'obtiendraient en remplaçant dans celle-ci, ξ par η, puis par ζ.

Mais les équations générales telles que (2) peuvent se mettre sous la forme indiquée par Lagrange,

$$(4) \qquad \frac{d}{dx} \frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi},$$

où U a la même signification que précédemment et où T désigne l'énergie kinétique,

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, d\tau,$$

ξ', η', ζ' représentant maintenant les dérivées par rapport au *temps*. Cette dernière équation n'étant qu'une transformation

de l'équation (2), il est évident qu'elle ne peut contenir, comme celle-ci, que des dérivées d'ordre pair dans le cas d'un milieu isotrope. Par conséquent, pour que les équations du mouvement contiennent des dérivées d'ordre impair il faut introduire des termes complémentaires, soit dans l'expression de la fonction U relative aux corps isotropes, soit au contraire dans l'expression T de l'énergie kinétique. On a donc deux moyens différents pour arriver aux formules d'Airy.

217. Dans les théories ordinaires de la lumière c'est la fonction U qui, changée de signe, représente l'énergie potentielle du milieu, que l'on modifie toutes les fois qu'il s'agit d'expliquer les phénomènes présentés par les milieux anisotropes. Dans la théorie de la polarisation rotatoire de Maxwell, c'est, au contraire, l'énergie kinétique T qui est modifiée, U conservant la même expression que dans un milieu isotrope. Quant aux raisons invoquées par ce physicien pour justifier cette modification et surtout pour arriver aux termes complémentaires qu'il convient d'introduire dans T pour retrouver la formule (I), elles laissent beaucoup à désirer comme précision et comme clarté. Nous y reviendrons plus tard; pour le moment acceptons sans explications le résultat des spéculations de Maxwell et montrons comment l'équation (4), et les deux qui s'en déduisent par la substitution de η et ζ à ξ, conduisent dans le cas d'une onde plane, à la formule (I). p. 242

Si nous posons

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} + \beta \frac{d\varphi}{dy} + \gamma \frac{d\varphi}{dz},$$

φ étant une fonction quelconque et α, β, γ les composantes de

la force magnétique, le terme complémentaire introduit par Maxwell dans l'énergie kinétique a pour expression.

$$(5)\quad C\int\left[\xi'\frac{d}{d\nu}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)+\eta'\frac{d}{d\nu}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right)\right.$$
$$\left.+\zeta'\frac{d}{d\nu}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)\right]d\tau.$$

Dans le cas d'une onde plane parralèle au plan des xy, les composantes ζ, η, ζ ne dépendent ni de x, ni de y; par suite, on a :

$$\frac{d\varphi}{d\nu}=\gamma\frac{d\varphi}{dz}$$

et le terme complémentaire se réduit à

$$C\int\gamma\left(\eta'\frac{d^2\xi}{dz^2}-\xi'\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)d\tau.$$

L'énergie kinétique est donc égale à

$$T=\frac{\rho}{2}\int(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\,d\tau+C\int\gamma\left(\eta'\frac{d^2\xi}{dz^2}-\xi'\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)d\tau.$$

218. Cherchons ce que devient l'équation (4) lorsqu'on y porte cette valeur de T.

Si nous supposons λ constant, nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\xi'}=\int\left(\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}-C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2dt}\right)d\tau.$$

Le terme principal de T ne donne rien dans $\frac{dT}{d\xi}$; quant au terme complémentaire, il faut le transformer pour pouvoir calculer sa dérivée par rapport à ξ. Or, on peut écrire

$$\int \eta' \frac{d^2\xi}{dz^2} d\tau = \int \lambda\eta' \frac{d\xi}{dz} d\omega - \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau,$$

la première intégrale du second membre étant étendue à la surface du volume considéré, et λ désignant le cosinus de l'angle formé par l'axe des x avec la normale à l'élément $d\omega$ de cette surface. Si nous supposons les intégrales de volume étendues à l'espace tout entier ses éléments de l'intégrale double se rapportent à des points situés à l'infini. Comme on peut supposer que ξ, η, ζ sont nuls à l'infini, les éléments de cette intégrale sont également nuls, et nous pouvons écrire

$$\int \eta' \frac{d^2\xi}{dz^2} d\tau = - \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau.$$

En effectuant une transformation analogue pour l'intégrale du second membre de l'égalité, précédente nous obtenons

$$- \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau = \int \xi \frac{d^2\eta'}{dz^2} d\tau,$$

La dérivée par rapport à ξ de cette dernière intégrale est

$$\int \frac{d^2\eta'}{dz^2} d\tau ;$$

par suite le terme complémentaire de T donne

$$-C\gamma\int\frac{d^3\eta}{dz^2dt}d\tau,$$

dans l'équation (4) et celle-ci peut s'écrire :

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}-2C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2dt}=\frac{dW}{d\xi}.$$

D'après Cauchy $\frac{dW}{d\xi}$ a pour expression dans un milieu isotrope

$$A_0\frac{d^2\xi}{dz^2}+A_1\frac{d^4\xi}{dz^4}+\dots$$

C'est d'ailleurs ce qui résulte de la forme du second membre de l'équation (3). L'équation (4) et celle qui s'en déduit en remplaçant ξ par η deviennent donc

$$(6)\quad \begin{cases} \rho\dfrac{d^2\xi}{dt^2}-2C\gamma\dfrac{d^3\eta}{dz^2dt}=A_0\dfrac{d^2\xi}{dz^2}+A_1\dfrac{d^4\xi}{dz^4}+\dots. \\ \rho\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+2C\gamma\dfrac{d^3\xi}{dz^2dt}=A_0\dfrac{d^2\eta}{dz^2}+A_1\dfrac{d^4\eta}{dz^4}+\dots. \end{cases}$$

219. Cherchons à satisfaire à ces équations en posant

$$(7)\quad \begin{cases} \xi=r\cos(nt-qz) \\ \eta=r\sin(nt-qz) \end{cases}$$

égalités qui expriment que la molécule considérée décrit une circonférence de rayon r. En substituant ces valeurs de ξ et η, nous obtenons, après suppression des facteurs communs, l'équa-

tion de condition

$$(8) \qquad \rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = A_0 q^2 + A_1 q^4 + \ldots$$

En divisant les deux membres par q^2 nous avons une équation du second degré en $\frac{n}{q}\cdot$ Ce rapport exprimant la vitesse de propagation du mouvement, nous avons donc deux valeurs pour cette vitesse. Mais le coefficient A_0 étant positif et les coefficients $A_1 \ldots$, étant très petits, l'une de ces valeurs est négative et il n'y a pas lieu de la considérer, si l'on ne s'occupe que des phénomènes qui se passent au-dessus du plan des xy.

Si nous donnons à n deux valeurs ne différant que par le signe, ce qui correspond à deux molécules décrivant la circonférence de rayon r en sens inverses, les valeurs positives de $\frac{n}{q}$ sont différentes, pourvu toutefois que γ ne soit pas nul. Un rayon circulaire droit ne se propage donc pas avec la même vitesse qu'un rayon circulaire gauche, par conséquent l'un d'eux prend une avance sur l'autre et si ces rayons proviennent d'un même rayon polarisé rectilignement ils se composent à la sortie du milieu pour donner un rayon polarisé rectilignement mais dont le plan de polarisation n'a pas le même azimut que la lumière incidente; il y a donc rotation du plan de polarisation.

220. Évaluons cette rotation. On sait qu'elle est égale à la moitié de la différence de phase que les rayons droit et gauche contractent, l'un par rapport à l'autre, en traversant le milieu et qu'elle s'effectue dans le sens du mouvement des molécules du rayon qui va le plus vite. Si donc nous dési-

gnons par q' et par q'' les valeurs de q pour le rayon droit et pour le rayon gauche et par c l'épaisseur du milieu traversé, le plan de polarisation tournera dans le sens des aiguilles d'une montre d'un angle égal à

$$\theta = \frac{c}{2}(q'' - q').$$

Mais d'après l'équation de condition (8), q dépend de γ. Comme d'ailleurs la variation de q due à l'action magnétique n'est toujours qu'une très faible fraction de la valeur même de q, nous pouvons écrire

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma}\gamma,$$

q_0 étant la valeur de q pour une force magnétique nulle. Cette quantité q_0 doit donc satisfaire à l'équation (8) dans laquelle on prend $\gamma = 0$; par suite on a

$$\rho n^2 = A_0 q_0^2 + A_1 q_0^4 + \dots..$$

Les quantités q' et q'' doivent satisfaire à cette même équation (8) dans laquelle on donne à n des valeurs ne différant que par le signe; à la valeur positive de n correspondra la valeur q'' puisque d'après les équations (7) on a un rayon circulaire gauche se propageant suivant la direction positive de l'axe des z quand n est positif; à la valeur négative de n correspondra au contraire la valeur q'; par conséquent nous aurons

$$\rho n^2 + 2C\gamma q'^2 n = A_0 q'^2 + A_1 q'^4 + \dots..$$
$$\rho n^2 - 2C\gamma q''^2 n = A_0 q''^2 + A_1 q''^4 + \dots..$$

La comparaison des trois dernières relations montre immédiatement que l'on a $q' > q_0$ et $q'' < q_0$; nous devons donc écrire

$$q' = q_0 + \frac{dq'}{d\gamma}\gamma, \qquad q'' = q_0 - \frac{dq''}{d\gamma}\gamma.$$

Si nous portons ces valeurs de q' et q'' dans l'expression de la rotation, nous obtenons

$$\theta = -\frac{c\gamma}{2}\left(\frac{dq'}{d\gamma} + \frac{dq''}{d\gamma}\right),$$

ou, en confondant les valeurs des dérivées de q' et de q'' par rapport à γ,

$$\theta = -c\gamma\frac{dq}{d\gamma}. \tag{9}$$

221. En dérivant par rapport à γ les deux membres de l'équation (8) où nous considérons n comme constant, nous avons

$$-2Cq^2n - 4C\gamma qn\frac{dq}{d\gamma} = (2A_0q + 4A_1q^3 + \ldots\ldots)\frac{dq}{d\gamma} = \frac{dQ}{dq}\frac{dq}{d\gamma}.$$

Mais, admettre, comme nous l'avons fait, que la quantité q ne varie que très peu sous l'influence d'un champ magnétique, c'est supposer que le coefficient C est très petit. Nous pouvons donc négliger le terme $4C\gamma qn\frac{dq}{d\gamma}$ par rapport aux termes du second membre, et il vient alors

$$\frac{dq}{d\gamma} = -2Cq^2n\frac{1}{\frac{dQ}{dq}}. \tag{10}$$

Si maintenant, dans l'équation (8) nous regardons γ comme constant nous avons en dérivant par rapport à n

$$2\rho n - 2C\gamma q^2 n - 4C\gamma q n \frac{dq}{dn} = (2A_0 q + 4A_1 q^3 + \ldots\ldots)\frac{dq}{dn} = \frac{dQ}{dq}\frac{dq}{dn}.$$

Pour la même raison que précédemment le terme $2C\gamma q^2 n$ peut être négligé par rapport à $2\rho n$ et le terme $4C\gamma q n \frac{dq}{dn}$ par rapport à ceux du second membre ; par suite nous obtenons

$$2\rho n = \frac{dQ}{dq}\frac{dq}{dn}.$$

Si nous portons dans la relation (10) la valeur de $\frac{dQ}{dq}$ tirée de cette dernière égalité, nous avons pour la valeur de la dérivée partielle $\frac{dq}{d\gamma}$,

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2}{\rho}\frac{dq}{dn}. \tag{11}$$

Pour exprimer cette dérivée en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ, de la lumière considérée et de l'indice de réfraction i du milieu, remarquons que l'on a

$$q\lambda = 2\pi i \qquad \text{et} \qquad n\lambda = 2\pi V,$$

V étant la vitesse de propagation dans le vide. De ces deux relations nous tirons

$$q = \frac{in}{V},$$

et par conséquent

$$\frac{dq}{dn} = \frac{1}{V}\left(i + n\frac{di}{dn}\right). \tag{12}$$

En outre, en différentiant la seconde, nous obtenons

$$\lambda dn + nd\lambda = 0,$$

d'où

$$\frac{n}{dn} = -\frac{\lambda}{d\lambda} \quad \text{et} \quad n\frac{di}{dn} = -\lambda\frac{di}{d\lambda}.$$

L'égalité (12) peut donc s'écrire

$$\frac{dq}{dn} = \frac{1}{V}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right);$$

si nous portons cette valeur dans la relation (11) et si dans cette relation nous remplaçons q par sa valeur $\frac{2\pi i}{\lambda}$, nous obtenons

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{4\pi^2 C}{\rho V}\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right).$$

Par conséquent, en posant

$$\frac{4\pi^2 C}{\rho V} = m$$

la valeur de la rotation donnée par la formule (9) deviendra

$$\theta = mc\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right).$$

Nous retrouvons donc bien la formule (I) d'Airy.

222. Interprétation du terme complémentaire de l'énergie kinétique. — Il s'agit maintenant d'expliquer l'introduction du terme complémentaire (5) dans l'expression de l'énergie kinétique du milieu. Comme nous l'avons dit les

explications de Maxwell n'ont pas toute la rigueur qu'on désirerait y rencontrer. Essayons cependant de les reproduire.

Maxwell pose ainsi la question : L'expérience apprend qu'un milieu isotrope soumis à l'action d'un champ magnétique fait tourner le plan de polarisation de la lumière ; par conséquent un rayon polarisé circulairement ne se propage pas avec la même vitesse suivant qu'il est droit ou gauche. Or si les composantes du déplacement d'une molécule d'éther sont exprimées par les équations (7), nous aurons un rayon circulaire droit ou gauche suivant que n est négatif ou positif. La vitesse de propagation suivant l'axe des z est $\frac{n}{q}$; comme elle doit avoir une valeur différente pour le rayon droit et pour le rayon gauche, à deux valeurs de n ne différant que par le signe doivent correspondre deux valeurs de q différentes et de signes contraires; ou bien, ce qui revient au même, à une valeur de q doivent correspondre deux valeurs de n différant par la valeur absolue et par le signe. Mais le milieu considéré constitue un système dynamique dont l'état est déterminé, à chaque instant, par un certain nombre d'équations. Nous avons donc à rendre compte de ce fait que, pour une valeur déterminée donnée à l'une et à l'autre des quantités q et r, il y a deux valeurs distinctes de n qui satisfont à ces équations.

Écrivons l'équation de Lagrange relative au paramètre r,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} = \frac{dU}{dr}.$$

Ce paramètre ayant une valeur déterminée ne changeant pas avec le temps, r' est nul ; par conséquent le premier terme

disparaît de l'équation précédente, qui devient

$$\frac{dT}{dr} + \frac{dU}{dr} = 0.$$

Mais T, énergie kinétique du système, est une fonction homogène du second degré des vitesses de ce système ; T contient donc n^2, puisque n est la vitesse angulaire d'une molécule d'éther. Il peut également contenir des termes où se trouvent les produits de n par d'autres vitesses et aussi des termes dans lesquels ces vitesses entrent au second degré mais où ne figure pas n. Quant à U, Maxwell suppose qu'il conserve la valeur qu'il possède dans un milieu isotrope non soumis à l'action du magnétisme ; par suite, U ne renferme que des dérivées de ξ et η par rapport à z; il ne contient donc pas n. Par conséquent l'expression la plus générale de l'équation de Lagrange que nous venons de considérer est

$$An^2 + Bn + C = 0.$$

Puisque, d'après ce qui précède, cette équation doit être satisfaite pour deux valeurs de n inégales en valeur absolue, il faut nécessairement que B soit différent de zéro. Comme les termes Bn proviennent uniquement de l'énergie kinétique, celle-ci contient donc au moins deux séries de termes. L'une, An^2, est homogène et du second degré par rapport à n ; c'est l'expression de l'énergie kinétique d'un milieu non soumis à l'action du magnétisme. L'autre contient la première puissance de n; elle est due au champ magnétique et par suite elle représente le terme complémentaire qu'il s'agit d'expliquer ou au moins une partie de ce terme.

223. Voici maintenant les conclusions que Maxwell déduit de ce qui précède :

« Tous les termes de T sont du second degré par rapport aux vitesses. Donc les termes qui renferment n doivent renfermer quelque autre vitesse. Or cette autre vitesse ne peut être ni r' ni q', puisque, dans le cas que nous considérons, r et q sont constants. C'est donc une vitesse existant dans le milieu, indépendamment du mouvement qui constitue la lumière. De plus, ce doit être ayant une quantité avec n une relation telle qu'en la multipliant par n le résultat soit une quantité scalaire ; car, T étant une quantité scalaire, ses termes ne peuvent être que des quantités scalaires. Donc cette vitesse doit être dans la même direction que n ou dans la direction contraire, c'est-à-dire que ce doit être une *vitesse angulaire* relative à l'axe des z.

« Or cette vitesse ne peut être indépendante de la force magnétique; car, si elle se rapportait à une direction fixe dans le milieu, les phénomènes seraient différents quand on retourne le milieu bout pour bout, ce qui n'est pas le cas.

« Nous sommes donc amené à cette conclusion, que cette vitesse est obligatoirement liée à la force magnétique, dans le milieu où se manifeste la rotation magnétique du plan de polarisation (*Traité d'électricité*, t. II, § 820). »

Un peu plus loin (§ 822), Maxwell ajoute :

« Lorsqu'on étudie l'action du magnétisme sur la lumière polarisée, on est donc conduit à conclure que, dans un milieu soumis à l'action d'une force magnétique, une partie du phénomène est due à quelque chose qui, par sa nature mathématique, se rapproche d'une vitesse angulaire agissant autour d'un axe dirigé suivant la force magnétique.

« Cette vitesse angulaire ne peut être celle d'aucune partie de dimensions finies du milieu, tournant d'un mouvement d'ensemble. Nous devons donc penser que cette rotation est celle de parties très petites du milieu tournant chacun autour de son axe. Telle est l'hypothèse des tourbillons moléculaires. »

224. Ainsi, d'après Maxwell, l'explication de la polarisation rotatoire magnétique doit résulter de l'existence de tourbillons dans le milieu soumis à l'action d'un champ magnétique, tourbillons que nous avons déjà vu intervenir dans l'interprétation des pressions électrodynamiques (**210**). Mais quelles sont les lois qui régissent les mouvements de ces tourbillons? Maxwell avoue notre ignorance absolue sur ce sujet et, faute de mieux, il admet que les tourbillons d'un milieu magnétique sont soumis aux mêmes conditions que ceux que Helmholtz (¹) a introduits dans l'Hydrodynamique, et que les composantes d'un tourbillon en un point sont égales à celles de la force magnétique en ce point.

Une des propriétés des tourbillons de Helmholtz peut s'énoncer comme il suit : soient P et Q deux molécules voisines sur l'axe d'un tourbillon; si le mouvement du milieu a pour effet d'amener les molécules en P' et en Q', la droite P'Q' représente la direction de l'axe du tourbillon, et la grandeur de celui-ci est modifiée dans le rapport de PQ à P'Q'.

Si nous appliquons cette propriété aux tourbillons d'un milieu soumis au magnétisme, nous aurons, en applant α, β, γ, les composantes de la force magnétique au point P, α', β' γ', les composantes de cette même force quand le point P est venu

(¹) *Sur le mouvement tourbillonnaire ; Journal de Crelle*, vol. LV, 1858.

en P′, et ξ, η, ζ, les composantes du déplacement du point P,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha\frac{d\xi}{dx} + \beta\frac{d\xi}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dz},\\ \beta' &= \beta + \alpha\frac{d\eta}{dx} + \beta\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\eta}{dz},\\ \gamma' &= \gamma + \alpha\frac{d\zeta}{dx} + \beta\frac{d\zeta}{dy} + \gamma\frac{d\zeta}{dz}. \end{aligned}\right.$$

225. Les composantes de la vitesse angulaire d'un élément du milieu ont pour valeur

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right),\\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right),\\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Or, puisque d'après les conclusions du § 223 l'énergie kinétique doit contenir cette vitesse, le terme correspondant, dans le cas où les axes de coordonnées sont quelconques par rapport à la direction de la force magnétique, doit être de la forme

$$2C(\omega_1\alpha' + \omega_2\beta' + \omega_3\gamma'),$$

et le terme complémentaire de l'énergie kinétique d'un certain volume du milieu a pour expression

$$2C\int(\omega_1\alpha' + \omega_2\beta' + \omega_3\gamma')\,d\tau.$$

Si dans cette pression nous remplaçons α', β', γ' par les

valeurs (12) et ω_1, ω_2, ω_3, par les valeurs (13) nous obtenons

$$(14)\left\{\begin{aligned} & C\int\left[\alpha\left(\frac{d\zeta'}{dy}-\frac{d\eta'}{dz}\right)+\beta\left(\frac{d\xi'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{d\eta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dy}\right)\right]d\tau \\ & +C\int\left[\alpha\frac{d\xi}{dx}\left(\frac{d\zeta'}{dy}-\frac{d\eta'}{dz}\right)+\beta\frac{d\xi}{dy}\left(\frac{d\zeta'}{dy}-\frac{d\eta'}{dz}\right)+\gamma\frac{d\xi}{dz}\left(\frac{d\zeta'}{dy}-\frac{d\eta'}{dz}\right)\right]d\tau \\ & +C\int\left[\alpha\frac{d\eta}{dx}\left(\frac{d\xi'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dx}\right)+\beta\frac{d\eta}{dy}\left(\frac{d\xi'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dx}\right)+\gamma\frac{d\eta}{dz}\left(\frac{d\xi'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dx}\right)\right]d\tau \\ & +C\int\left[\alpha\frac{d\zeta}{dx}\left(\frac{d\eta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dy}\right)+\beta\frac{d\zeta}{dy}\left(\frac{d\eta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dy}\right)+\gamma\frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{d\eta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dy}\right)\right]d\tau. \end{aligned}\right.$$

Montrons que si l'on étend l'intégration à l'espace tout entier la première intégrale de cette somme est nulle dans le cas qui nous occupe. En effet, en intégrant par parties, le premier terme de cette intégrale donne

$$\int \alpha \frac{d\zeta'}{dy} d\tau = \int \alpha\zeta' dx dy - \int \zeta' \frac{d\alpha}{dy} d\tau.$$

L'intégrale de surface se rapportant à la surface limite, qui est à l'infini d'après notre hypothèse, ζ' et α sont nuls; par suite l'intégrale elle-même est égale à zéro. Dans l'intégrale triple du second membre entre la dérivée $\frac{d\alpha}{dy}$; si donc le champ magnétique est uniforme, comme c'est généralement le cas lorsqu'on étudie la polarisation rotatoire magnétique, cette dérivée est nulle et l'intégrale triple l'est aussi. En prenant ainsi successivement tous les termes de la pre-

mière intégrale de l'expression du terme complémentaire, on verrait qu'ils sont tous égaux à zéro. Il n'y a donc à considérer que les trois autres intégrales de cette expression

Celles-ci peuvent se mettre sous une autre forme. Considérons en effet le premier terme de la première d'entre elles; nous obtenons, en intégrant par parties

$$\int \alpha \frac{d\xi}{dx}\frac{d\zeta'}{dy}\,d\tau = \int \alpha\zeta' \frac{d\xi}{dx}\,dx dz - \int \alpha\zeta' \frac{d^2\xi}{dx dy}\,d\tau.$$

ou, puisque l'intégrale de surface est nulle pour les mêmes raisons que précédemment

$$\int \alpha \frac{d\xi}{dx}\frac{d\zeta'}{dy} = - \int \alpha\zeta' \frac{d^2\xi}{dx dy}\,d\tau.$$

Le second terme de l'avant-dernière intégrale du terme complémentaire nous donne, en opérant de la même manière,

$$-\int \alpha \frac{d\eta}{dx}\frac{d\zeta'}{dx} = + \int \alpha\zeta' \frac{d^2\eta}{dx^2}\,d\tau,$$

et nous avons pour la somme des deux termes considérés

$$\int \alpha\zeta' \frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) d\tau.$$

Une transformation analogue effectuée sur tous les termes

et un groupement convenable de ceux-ci montreraient que l'expression (**14**) se réduit bien à l'expression (5) que nous avons introduit (**217**) comme terme complémentaire dans l'énergie kénétique du milieu soumis à l'action du magnétisme.

226. Difficultés soulevées par la théorie de Maxwell. — Dans la théorie que nous venons d'analyser, Maxwell semble avoir complètement abandonné la théorie électromagnétique de la lumière. Nous avons, en effet, implicitement admis avec ce physicien, que lorsqu'une onde se propage dans un milieu placé dans un champ magnétique, les composantes ξ, η, et ζ du déplacement d'une molécule d'éther ne dépendent pas directement de la force magnétique. Or, nous avons vu (**189**) que la concordance de la théorie électromagnétique de la lumière avec les théories actuellement adoptées pour l'explication des phénomènes lumineux exigeait que les dérivées par rapport au temps de ξ, η, ζ soient respectivement égales aux composantes α, β, γ de la force magnétique. Pour que la théorie de Maxwell sur la polarisation rotatoire magnétique s'accorde avec la théorie électromagnétique il faudrait qu'il en fût encore ainsi ; c'est ce qui ne semble pas avoir lieu.

D'autre part les formules de Helmholtz semblent assez difficilement applicables au cas qui nous occupe. Elles s'appuient sur les principes de l'Hydrodynamique qu'il serait sans doute malaisé d'étendre à l'éther, puisqu'il faudrait y supposer une pression uniforme dans tous les sens.

Elles supposent en outre qu'il y a entre les composantes du déplacement et celles du tourbillon, certaines relations qui

pourraient s'écrire :

$$\alpha = \frac{d^2\zeta}{dydt} - \frac{d^2\eta}{dzdt}$$
$$\beta = \frac{d^2\xi}{dzdt} - \frac{d^2\zeta}{dxdt}$$
$$\gamma = \frac{d^2\eta}{dxdt} - \frac{d^2\xi}{dydt}$$

et dont Maxwell ne tient pas compte.

227. Admettons pour un instant que les dérivées ξ', η', ζ' sont respectivement égales à α, β, γ et cherchons les conséquences de cette hypothèse.

Le terme principal de l'énergie kinétique devient

$$\frac{\mu}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau.$$

Les binômes alternés qui entrent dans l'expression (14) du terme complémentaire ou les dérivées par rapport au temps de ceux qui se trouvent dans l'expression (5) de ce même terme ont alors pour valeurs

$$\frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$
$$\frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},$$
$$\frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Mais d'après les équations (II) du § 167 les seconds membres de ces égalités sont respectivement égaux à $4\pi u$, $4\pi v$, $4\pi w$. Comme u, v, w, sont les dérivées par rapport au temps des composantes f, g, h du déplacement électrique nous obte-

nons donc en intégrant,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}&=4\pi f,\\ \frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}&=4\pi g,\\ \frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}&=4\pi h. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent l'expression (5) du terme complémentaire peut s'écrire

$$(16)\qquad 4\pi C\int\left(\alpha\,\frac{df}{d\nu}+\beta\,\frac{dg}{d\nu}+\gamma\,\frac{dh}{d\nu}\right)d\tau.$$

Les quantités désignées par les symboles $\frac{df}{d\nu}\cdots$, renfermant les produits des composantes de la force magnétique par les dérivées du déplacement électrique prises par rapport à x, y, z, ce terme complémentaire est du troisième degré par rapport à ces quantités. Dans le terme principal de T, α, β, γ entrent au second degré, mais les dérivées du déplacement électrique n'y figurent pas. Par conséquent, en général les équations du mouvement seront linéaires, comme cela a lieu dans les théories ordinaires de la lumière ; dans la polarisation rotatoire, elles cesseront d'être linéaires par suite de l'introduction du terme complémentaire. Il en résulte que dans ce dernier cas la vitesse de propagation des perturbations constituant la lumière dépendra de α, β, γ et par conséquent de l'intensité lumineuse qui est fonction de ces quantités. Cette conséquence est tout à fait contraire aux faits observés dans tous les autres phénomènes lumineux ; il est

donc permis de douter qu'il y ait accord entre la théorie électromagnétique et la théorie de la polarisation rotatoire magnétique.

228. Toutefois il ne faudrait pas sur cette conclusion, se hâter de rejeter cette dernière théorie. C'est qu'en effet, dans les conditions où se font les expériences, on se trouve dans un des cas particuliers, où quoique le terme complémentaire soit du troisième degré, les équations du mouvement sont linéaires.

Pour le montrer considérons une onde plane polarisée, et prenons pour plan des xy un plan parallèle à l'onde. Le déplacement électrique s'effectuant dans le plan de l'onde (**180**) la composante h est nulle. En outre f et g ne dépendent ni de x ni de y. Par conséquent le terme complémentaire (16) se réduit à

$$4\pi C \int \gamma \left(\alpha \frac{df}{dz} + \beta \frac{dg}{dz} \right) d\tau.$$

Les composantes α, β, γ de la force magnétique peuvent être considérées comme la somme des composantes de la force magnétique du champ constant dans lequel se trouve le milieu traversé par l'onde et des composantes de la force magnétique du champ dont les perturbations périodiques donnent lieu aux phénomènes lumineux. Ces dernières composantes sont variables avec le temps. Mais nous savons que la force magnétique du champ périodique est dirigée dans le plan de l'onde ; sa composante suivant l'axe des z est donc nulle dans le cas qui nous occupe. Par suite la quantité γ qui entre dans l'expression précédente du terme com-

plémentaire a pour valeur la composante suivant l'axe des z du champ constant produit par les aimants ou les courants. Cette quantité étant constante le terme complémentaire n'est plus que du second degré par rapport à α, β, $\frac{df}{dz}$ et $\frac{dg}{dz}$ et les équations du mouvement redeviennent linéaires.

On peut d'ailleurs faire voir autrement que γ est une constante. En effet, écrivons l'équation de Lagrange relative à cette quantité; nous aurons

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\gamma'} - \frac{dT}{d\gamma} = \frac{dU}{d\gamma}.$$

Or d'après Cauchy, U ne dépend pas de ζ; par suite il est indépendant de γ et le second membre de cette équation est nul. Le premier terme est aussi nul puisque T, qui a ici pour valeur

$$T = \frac{\mu}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau + 4\pi C\int \gamma\left(\alpha\frac{df}{dx} + \beta\frac{dg}{dz}\right)d\tau,$$

ne contient pas γ'. Par conséquent l'équation précédente se réduit à

$$\frac{dT}{d\gamma} = 0$$

ou, en remplaçant T par la valeur précédente et effectuant la dérivation,

$$\frac{\mu}{4\pi}\gamma + 4\pi C\left(\alpha\frac{df}{dz} + \beta\frac{dg}{dz}\right) = 0.$$

Pour que γ soit constant il suffit donc que le second terme

le soit également. Or, si nous tenons compte des relations (15) qui donnent les composantes du déplacement, nous avons pour ce terme

$$C\left[\alpha\left(\frac{d^2\zeta}{dydz}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)+\beta\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}-\frac{d^2\zeta}{dxdz}\right)\right],$$

ou, puisque l'onde est perpendiculaire à l'axe des z,

$$C\left(\beta\frac{d^2\xi}{dz^2}-\alpha\frac{d^2\eta}{dz^2}\right),$$

ou enfin

$$C\left(\eta'\frac{d^2\xi}{dz^2}-\xi'\frac{d^2\eta}{dz^2}\right).$$

Mais ξ et η étant les composantes du déplacement d'une molécule d'éther, ces quantités satisfont aux équations

$$\xi = r\cos(nt-qz),$$
$$\eta = r\sin(nt-qz).$$

Si nous calculons les dérivées de ξ et η par rapport à t et leurs dérivées secondes par rapport à z et si nous portons les valeurs ainsi trouvées dans le terme précédent, nous obtenons

$$Cr^2nq^2[-\cos(nt-qz)\cos(nt-qz)-\sin(nt-qz)\sin(nt-qz)] = -Cr^2nq.$$

C'est donc une quantité indépendante de t; par suite γ est constant.

229. Une autre difficulté de la théorie découle de l'application des propriétés des tourbillons d'Helmholtz aux tourbillons moléculaires d'un milieu soumis au magnétisme. En

effet il faut nécessairement que l'énergie de ce milieu ait pour valeur

$$\frac{\mu}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau.$$

Or, si α, β, γ sont, comme l'admet Maxwell, les composantes d'un tourbillon d'Helmholtz l'énergie kinétique du milieu a une valeur toute différente.

Il paraît assez difficile d'aplanir cette difficulté. On ne pourrait guère y parvenir qu'en modifiant profondément la théorie de Maxwell et ces modifications la rapprocheraient de la théorie proposée par M. Potier.

230. Théorie de M. Potier. — Cette théorie est fondée sur les deux hypothèses suivantes :

1° La matière pondérable participe dans une certaine mesure, variable avec la longueur d'onde, au mouvement de l'éther ;

2° Les molécules d'un corps pondérable deviennent de véritables aimants sous l'action d'un champ magnétique.

La première hypothèse, déjà admise par Fresnel, semble confirmée par les expériences de M. Fizeau sur l'entraînement de l'éther ; la seconde est conforme au mode ordinaire d'interprétation des propriétés magnétiques ou diamagnétiques des milieux pondérables.

De ces deux hypothèses il résulte que chaque molécule aimantée du milieu éprouve un déplacement périodique lorsqu'un rayon traverse ce milieu. En général ce déplacement n'est pas une translation, les deux pôles de l'aimant se déplaçant de quantités inégales ; la direction de l'axe magnétique

d'une molécule change donc périodiquement ainsi que les composantes de son moment magnétique et, par suite, des forces électromotrices d'induction prennent naissance dans le milieu. Ces forces s'ajoutant à celles qui résultent de la perturbation magnétique constituant la lumière, la loi qui lie cette perturbation au temps se trouve modifiée et on conçoit que le plan de polarisation change d'azimut.

231. Montrons, en effet, que les hypothèses de M. Potier conduisent à introduire dans l'expression de l'énergie kinétique le terme complémentaire de Maxwel et, par conséquent, permettent de retrouver la formule (I) d'Airy.

Soient x, y, z et $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ les coordonnées des pôles d'une molécule aimantée dans sa position normale, et $+ m$ et $- m$ les masses magnétiques respectives de ces pôles; nous avons pour les composantes du moment magnétique de la molécule,

$$m\delta x, \qquad m\delta y, \qquad m\delta z.$$

Pour avoir les valeurs nouvelles de ces composantes lorsque la molécule est dérangée de sa position d'équilibre par l'effet de la perturbation lumineuse, il nous faut connaître la direction suivant laquelle la matière pondérable est entraînée par cette perturbation. Nous admettrons, ce qui est le plus naturel, que cette direction est celle du déplacement électrique. Comme d'ailleurs, dans la théorie électromagnétique, le déplacement électrique est perpendiculaire au plan de polarisation (**189**), cette hypothèse revient à admettre que la matière pondérable se déplace suivant la direction de la vibration de Fresnel. Si donc f, g, h sont les composantes du

déplacement électrique au point x, y, z, et ε un coefficient de proportionnalité, nous aurons pour les coordonnées de l'un des pôles de la molécule déplacée,

$$x+\varepsilon f, \qquad y+\varepsilon g, \qquad z+\varepsilon h,$$

et pour les coordonnées de l'autre pôle,

$$x+\delta x+\varepsilon f+\varepsilon\delta f, \quad y+\delta y+\varepsilon g+\varepsilon\delta g, \quad z+\delta z+\varepsilon h+\varepsilon\delta h.$$

La variation δf de la composante f du déplacement pour les variations δx, δy, δz des coordonnées peut se développer suivant les puissances croissantes de ces dernières quantités ; en négligeant les termes du second degré et des degrés plus élevés, nous aurons

$$\delta f=\frac{df}{dx}\delta x+\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z.$$

Par conséquent les composantes du moment magnétique de la molécule déplacée sont données par

$$m(\delta x+\varepsilon\delta f)=m\delta x+\varepsilon\frac{df}{dx}m\delta x+\varepsilon\frac{df}{dy}m\delta y+\varepsilon\frac{df}{dz}m\delta x,$$

et deux autres expressions analogues.

282. Introduisons les composantes de la magnétisation. Soient A, B, C ces composantes au point x, y, z ; A', B', C' leurs nouvelles valeurs quand ce point s'est déplacé de εf, εg, εh; nous avons

$$A d\tau = m\delta x, \qquad B\delta\tau = m\delta y, \qquad C d\tau = m\delta z$$
$$A' d\tau=m(\delta x+\varepsilon\delta f), \quad B' d\tau=m(\delta y+\varepsilon\delta g), \quad C' d\tau=m(\delta z+\varepsilon\delta h),$$

$d\tau$ étant le volume de la molécule aimantée. Par suite la dernière égalité du paragraphe précédent peut s'écrire

$$A' = A + \varepsilon\left(A\frac{df}{dx} + B\frac{df}{dy} + C\frac{df}{dz}\right).$$

Mais les composantes de la magnétisation sont liées à celles de la force magnétique (**103**) par les relations

$$A = \varkappa\alpha, \qquad B = \varkappa\beta, \qquad C = \varkappa\gamma$$

$\varkappa$ étant la fonction magnétisante. Par conséquent l'égalité précédente devient, lorsqu'on y remplace A, B, C par ces valeurs,

$$A' = \varkappa\alpha + \varepsilon\varkappa\left(\alpha\frac{df}{dx} + \beta\frac{df}{dy} + \gamma\frac{df}{dz}\right)$$

ou

$$(1) \qquad A' = \varkappa\alpha + \varepsilon\varkappa\frac{df}{d\nu}$$

233. D'autre part l'induction magnétique a pour composantes

$$a = \alpha + 4\pi A, \qquad b = \beta + 4\pi B, \qquad c = \gamma + 4\pi C,$$

et ces composantes deviennent après le déplacement de la molécule

$$a' = \alpha' + 4\pi A', \qquad b' = \beta' + 4\pi B', \qquad c' = \gamma' + 4\pi C'.$$

Montrons que les composantes α', β', γ' de la force magnétique qui entrent dans ces dernières égalités sont respectivement égales à α, β, γ.

Nous avons en dérivant par rapport à x les deux membres de l'équation (1).

$$\frac{dA'}{dx} = \varkappa\frac{d\alpha}{dx} + \varepsilon\varkappa\frac{d}{d\nu}\frac{df}{dx}.$$

En dérivant B' par rapport à y et C' par rapport à z et additionnant les trois dérivées partielles ainsi trouvées, nous obtenons

$$\frac{dA'}{dx}+\frac{dB'}{dy}+\frac{dC'}{dz}=\varkappa\frac{d\alpha}{dx}+\varkappa\frac{d\beta}{dy}+\varkappa\frac{d\gamma}{dz}$$
$$+\varepsilon\varkappa\frac{d}{d\nu}\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right).$$

Mais par suite de l'incompressibilité de l'électricité la somme des dérivées partielles $\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dh}{dz}$ est égale à zéro ; par suite, l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{dA'}{dx}+\frac{dB'}{dy}+\frac{dC'}{dz}=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}.$$

Le premier membre est, au signe près, la densité au point $x+\varepsilon f$, $y+\varepsilon g$, $z+\varepsilon h$ de la distribution magnétique fictive pouvant remplacer dans ses effets le corps soumis à l'influence du champ ; le second membre représente la même quantité au point x, y, z.

Par conséquent la distribution fictive n'est pas modifiée par le déplacement des molécules aimantées. La force magnétique en un point doit donc conserver la même valeur que ces molécules soient, ou non, dans leurs positions d'équilibre.

234. Puisque nous avons

$$a'=\alpha+4\pi A',$$

nous obtenons en remplacant A' par sa valeur (1)

$$a'=\alpha\,(1+4\pi\varkappa)+4\pi\varkappa\varepsilon\frac{df}{d\nu}.$$

Or on sait que

$$1 + 4\pi\kappa = \mu\,;$$

par suite si on pose

$$\kappa\varepsilon = 8\pi C,$$

(C ne désignant pas la composante de la magnétisation suivant l'axe des z), on obtient pour les composantes de l'induction

$$a' = \mu\alpha + 32\pi^2 C \frac{df}{d\nu},$$

$$b' = \mu\beta + 32\pi^2 C \frac{dg}{d\nu},$$

$$c' = \mu\gamma + 32\pi^2 C \frac{dh}{d\nu}.$$

L'énergie kinétique du milieu,

$$T = \int \frac{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma}{8\pi}\, d\tau,$$

aura donc pour valeur

$$T = \frac{\mu}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau + 4\pi C \int \left(\alpha \frac{df}{d\nu} + \beta \frac{dg}{d\nu} + \gamma \frac{dh}{d\nu}\right) d\tau.$$

Nous retrouvons donc la même valeur que dans la théorie de Maxwel, le terme complémentaire étant mis sous la forme (16) [1].

[1] Postérieurement à l'époque où ces leçons ont été faites d'après les indications verbales de M. Potier, ce savant a exposé sa théorie de la polarisation rotatoire magnétique dans deux notes publiées, l'une dans la traduction française du *Traité* de Maxwell (t. II, p. 534), l'autre dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CVIII, p. 510). Dans ces

235. Théorie de M. Rowland (1). — Avant M. Potier, M. Rowland avait essayé de concilier la théorie de la polarisation rotatoire magnétique avec la théorie électromagnétique de la lumière en introduisant une hypothèse dont l'origine résulte d'une interprétation d'un phénomène découvert peu de temps auparavant par M. Hall (2).

Rappelons en quoi consiste le phénomène de Hall. Soit ABCD

deux notes, M. Potier détermine les composantes de la force électromotrice induite par le déplacement des molécules aimantées et démontre qu'en chaque point du milieu cette force électromotrice est normale au courant qui passe par ce point, dirigée dans le plan de l'onde, proportionnelle au courant et à la composante suivant la direction du rayon de la force magnétique. Introduisant ensuite les composantes de cette force électromotrice dans les équations du champ magnétique, il en tire les équations différentielles qui donnent à chaque instant les composantes de la perturbation. Il arrive ainsi dans le cas d'une onde de plan parallèle au plan des xy, soit aux équations

$$K\mu \frac{d^2F}{dt^2} + 2K\mu C\gamma \frac{d^3G}{dz^2dt} = \frac{d^2F}{dz^2}$$

$$K\mu \frac{d^2G}{dt^2} - 2K\mu C\gamma \frac{d^3F}{dz^2dt} = \frac{d^2G}{dz}$$

qui donnent les composantes du moment électromagnétique, soit aux équations

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2dt} = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2}$$

$$\rho \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3\xi}{dz^2dt} = A_0 \frac{d^2\eta}{dz^2}$$

qui donnent le mouvement d'une molécule d'éther. Ces deux groupes d'équations contenant des dérivées du troisième ordre conduisent comme nous l'avons vu, à la rotation du plan de polarisation.

Le mode d'exposition de M. Potier, qui n'est d'ailleurs pas identique dans les deux notes, diffère donc beaucoup de celui que nous avons adopté; il se rapproche de celui que nous suivrons dans l'exposé de la théorie de M. Rowland.

(1) *Philosophical Magazine*, avril 1881 ; MASCART et JOUBERT. *Traité d'électricité* t. I, p. 702 et suiv.

(2) *American Journal of Mathematics*, t. II, 1879.

(*fig.* 35) un conducteur métallique très mince taillé en forme de croix, parcouru par le courant d'une pile de A en B et dont les extrémités CD de la branche transversale communiquent avec un galvanomètre. En déplaçant les points d'attache des fils du galvanomètre on arrive facilement à ce qu'aucun cou-

C et 4

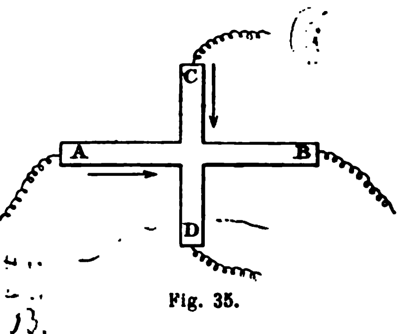


Fig. 35.

rant dérivé ne traverse le galvanomètre. L'appareil étant ainsi disposé, si on le place dans un champ magnétique très intense de telle sorte que son plan soit perpendiculaire à la direction du champ on voit l'aiguille du galvanomètre dévier. Pour la plupart des métaux et pour un champ magnétique traversant le plan de la figure d'avant en arrière la déviation du galvanomètre indique que le courant qui traverse cet instrument va de C en D dans la branche transversale du conducteur; le courant AB paraît donc entraîné suivant la direction de la force électromagnétique qui s'exerce sur le conducteur lui-même. Pour le fer, le déviation de l'aiguille du galvanomètre et, par suite, le courant dérivé changent de sens; néanmoins on peut encore dire que le courant est entraîné suivant la force magnétique, puisqu'à l'intérieur d'une lame de fer, par suite de l'aimantation sous l'influence du champ extérieur, le sens des lignes de force et la direction de la force magnétique ont changé de signe.

Ces faits peuvent évidemment s'interpréter en admettant qu'une force électromotrice prend naissance sous l'action du champ magnétique et qu'elle est dirigée suivant la force magnétique qui agit sur la matière pondérable du conducteur. Quant à sa grandeur, comme l'effet observé est toujours très petit, on peut admettre quelle est proportionnelle à la force magnétique. Toutefois cette explication est peu satisfaisante, car elle devrait s'appliquer à tout conducteur quelles que soient ses dimensions, et le phénomène de Hall ne se produit plus dès que l'épaisseur de la lame dépasse quelques dixièmes de millimètre. D'ailleurs, elle a été mise en doute par des expériences récentes, notamment par celles de M. Righi et M. Leduc, qui ont montré qu'une hétérotropie spéciale du conducteur sous l'action du champ était la meilleure explication des faits.

236. Quoiqu'il en soit, M. Rowland adopte l'hypothèse de la production d'une force électromotrice et suppose qu'une force électromotrice du même genre se développe dans un milieu non conducteur placé dans un champ magnétique lorsque ce milieu est parcouru par les courants de déplacement résultant de la propagation de la lumière. C'est d'ailleurs cette même force électromotrice que M. Potier introduit au moyen d'hypothèses plus acceptables que celles de M. Rowland.

Cette force électromotrice étant proportionnelle à la force électromagnétique et ayant même direction que celle-ci, nous aurons pour ses composantes

$$(1) \qquad \begin{cases} P_1 = \varepsilon\,(cv - bw), \\ Q_1 = \varepsilon\,(aw - cu), \\ R_1 = \varepsilon\,(bu - av). \end{cases}$$

L'induction magnétique se compose de l'induction du champ constant auquel est soumis le milieu et de l'induction du champ périodique donnant naissance à la lumière. Les composantes de la première sont $\mu\alpha_1$, $\mu\beta_1$, $\mu\gamma_1$, les composantes de l'intensité du champ constant et uniforme étant α_1, β_1, γ_1 ; celles de la seconde sont données par les équations (III) du § 167. Nous avons donc,

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} + \mu\alpha_1,$$

$$b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} + \mu\beta_1,$$

$$c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} + \mu\gamma_1.$$

237. Si l'on considère une onde plane parallèle au plan des xy les variables ne dépendent ni de x, ni de y et les équations précédentes se réduisent à

$$(2) \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{dG}{dz} + \mu\alpha_1, \\ b = +\dfrac{dF}{dz} + \mu\beta_1, \\ c = \mu\gamma_1. \end{cases}$$

Les équations (II) du § 167 qui donnent les composantes u, v, w de la vitesse du déplacement électrique deviennent

$$4\pi u = -\frac{d\beta}{dz} = -\frac{1}{\mu}\frac{db}{dz},$$

$$4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{\mu}\frac{da}{dz},$$

$$4\pi w = 0.$$

En y remplaçant les dérivées de a et de b par rapport à z,

par leurs valeurs déduites des équations (2), nous obtenons puisque α_1, β_1, γ_1, sont constants

$$(3)\quad \begin{cases} 4\pi u = -\frac{1}{\mu}\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{d\beta_1}{dz} = -\frac{1}{\mu}\frac{d^2F}{dz^2}, \\ 4\pi v = -\frac{1}{\mu}\frac{d^2G}{dz^2} + \frac{d\alpha_1}{dz} = -\frac{1}{\mu}\frac{d^2G}{dz^2}, \\ 4\pi w = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc, à l'aide des relations (2) et (3), exprimer les composantes de la force électromotrice données par les équations (1) en fonction du moment électromagnétique; nous trouvons pour les composantes parallèles au plan de l'onde

$$P_1 = -\frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^2G}{dz^2},$$

$$Q_1 = -\frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^2F}{dz^2};$$

quant à la troisième composante il est inutile de la considérer car étant perpendiculaire au plan de l'onde elle ne peut avoir aucun effet sur la perturbation magnétique constituant la lumière. Les composantes de la force électromotrice résultant de cette dernière perturbation étant (**177**)

$$P = -\frac{dF}{dt}. \qquad Q = -\frac{dG}{dt}$$

nous aurons pour les composantes parallèles au plan de l'onde de la force électromotrice totale

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^2G}{dz^2},$$

$$Q = -\frac{dG}{dt} + \frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^2F}{dz^2},$$

et, par suite des équations (VIII) du § 169,

$$4\pi u = -K\frac{d^2F}{dt^2} - \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^3G}{dz^2dt},$$

$$4\pi v = -K\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^4F}{dz^2dt}.$$

En remplaçant les premiers membres de ces équations par leurs valeurs (3), nous obtenons enfin

$$K\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^3G}{dz^2dt} = \frac{1}{\mu}\frac{d^2F}{dz^2},$$

$$K\frac{d^2G}{dt^2} - \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi}\frac{d^3F}{dz^2dt} = \frac{1}{\mu}\frac{d^2G}{dz^2}.$$

D'après la remarque faite au § 178, α, β, γ satisfont à des équations de même forme ; par suite il en est de même des composantes ξ, η, ζ du déplacement d'une molécule d'éther dont les dérivées par rapport à τ sont ξ, η, ζ. Nous retrouvons donc les équations du mouvement qui ont conduit Airy à une expression de l'angle θ de rotation du plan de polarisation d'accord avec l'expérience.

238. Phénomène de Kerr. — A la polarisation rotatoire magnétique se rattache un phénomène découvert en 1876 par M. Kerr (¹) et qui consiste dans la rotation du plan de polarisation d'un rayon pelarisé réfléchi sur le pôle d'un aimant.

La lumière d'une lampe, polarisée par un nicol et réfléchie par une lame de verre inclinée à 45°, tombe normalement sur le pôle, s'y réfléchit et, après avoir traversé la lame de

(¹) *Philosophical Magazine*, 5ᵉ série, t. III, p. 321 (1877); t. V, p. 161 (1878).

verre et un nicol analyseur, est reçue par l'œil. Une masse de fer, qui est percée d'un trou conique pour permettre le passage aux rayons lumineux, est placée très près de la surface réfléchissante, dans le but de rendre très intense l'aimantation de cette surface.

Ayant placé le polariseur dans une position telle que les vibrations qui tombaient sur les pôles étaient parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence, et ayant tourné l'analyseur jusqu'à l'extinction, M. Kerr vit reparaître la lumière, bien que faiblement, en aimantant par un courant le pôle réfléchissant. Mais comme M. Kerr ne disposait que d'une faible force magnétique, pour rendre l'action plus évidente, il déplaçait légèrement le polariseur ou l'analyseur avant de faire l'expérience, de manière à ce que l'extinction ne fût pas complète. Au moment où l'on fermait le courant dans une certaine direction, la lumière reçue par l'œil augmentait; dans la direction contraire, elle diminuait et souvent l'on arrivait tout à fait à l'extinction. Cette diminution de l'intensité se produisait si, avant le passage du courant, on avait tourné l'analyseur dans une direction contraire à celle du courant d'aimantation. M. Kerr en conclut qu'il se produisait, par l'aimantation, une rotation du plan de polarisation, en sens contraire aux courants d'Ampère.

M. Kerr observa également une rotation lorsque le rayon tombe obliquement, sur la surface réfléchissante; mais dans ce cas les phénomènes se compliquent de la polarisation elliptique due à la réflexion métalllique, à moins cependant que les vibrations du rayon incident soient ou parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence.

239. M. Gordon (¹) et M. Fitzgerald (²) répétèrent bientôt ces expériences avec des champs magnétiques très puissants; les résultats qu'ils obtinrent confirmèrent les travaux de M. Kerr. Plus récemment l'étude de ce phénomène a été reprise par M. Righi (³) qui l'a rendu plus facilement observable en l'amplifiant par des réflexions successives du rayon lumineux sur deux pôles d'aimant convenablement disposés. Enfin M. Kuntz (⁴) s'est également occupé de cette question; il a montré que la réflexion sur le nickel et le cobalt donnait aussi naissance au phénomène de Kerr; de plus, il a reconnu que la rotation du plan de polarisation dans le cas de l'incidence normale, qui change de valeur avec la couleur de la radiation, est plus grande pour les rayons rouges que pour les rayons violets : la dispersion est donc anormale.

Mais malgré ces nombreux travaux et les recherches théoriques de M. Righi (⁵) l'explication complète du phénomène de Kerr fait encore défaut. On ne peut affirmer si c'est un phénomène nouveau ou s'il est dû uniquement au pouvoir rotatoire magnétique de l'air qui environne les pôles. Aussi, n'insisterons-nous pas plus longuement sur ce sujet.

(1) *Philosophical Magazine*, 5ᵉ série, t. IV, p. 104 (1877).
(2) *Philosophical Magazine*, 5ᵉ série, t. III, p. 529 (1877).
(3) Mémoire présenté à l'Académie royale des Lincei (14) décembre 1884.
(4) *Wied. Ann.*, octobre 1884.
(5) *Loc. cit.* et nouveau Mémoire inséré dans les *Annales de chimie et de physique*, septembre 1886.

CHAPITRE XIII [1]

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES DES HYPOTHÈSES DE MAXWELL

240. Nous n'avons indiqué jusqu'ici que deux vérifications des théories de Maxwell : l'égalité des vitesses de propagation de la lumière et des perturbations électromagnétiques, et la vérification de la relation $K = n^2$. Mais, outre que ces vérifications sont indirectes, nous savons que la seconde laisse beaucoup à désirer. De nouvelles expériences étaient donc nécessaires pour s'assurer de la justesse des hypothèses de Maxwell.

Ces hypothèses se réduisent, au fond, aux deux suivantes :

1° Les courants de déplacements exercent, comme les courants de conduction, des actions électrodynamiques ou électromagnétiques et des actions d'induction ;

2° Dans un champ électrique et dans un champ magnétique ; il existe des tensions suivant les lignes de force et des pressions dans les directions perpendiculaires à ces lignes.

[1] Ce chapitre entier est l'œuvre personnelle de M. Blondin.

La vérification de la première hypothèse est toute récente ; celle de la seconde est antérieure de quelques années.

241. Déformation électrique des diélectriques. — L'existence de tensions et de pressions dans un diélectrique placé dans un champ électrique, a nécessairement pour effet une déformation de ce diélectrique.

La déformation du verre d'une bouteille de Leyde paraît avoir été découverte dès l'époque de Volta. D'après une lettre de ce physicien, l'abbé Fontanet a observé que lorsqu'on charge une bouteille de Leyde dont l'armature interne est constituée par un liquide conducteur, ce liquide éprouve une diminution apparente de volume. En rapportant ce phénomène, Volta l'attribue à une augmentation de volume du verre de la bouteille sous l'influence d'une pression due aux charges des armatures.

Ce phénomène et son explication étaient complètement oubliées lorqu'en 1877, M. Govi (1) le signala de nouveau. Il reconnut qu'il se présentait avec divers liquides, mais ne put l'observer avec le mercure ; il attribua sa production à une contraction du liquide.

242. *Expériences de M. Duter.* — Deux ans plus tard, M. Duter (2) montra que le phénomène se produit quel que soit le liquide employé et qu'il n'est pas dû à une contraction du liquide.

L'appareil de M. Duter se compose de deux cylindres AB et CD (*fig.* 36) portant deux tubes capillaires *ab* et *cd*; deux

(1) *Nuovo Cimento*, XXI et XXII ; *Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 857 ; 1878.

(2) *Comptes rendus* 1879 ; *Journal de physique*, 1re série, t. VIII, p. 82.

entonnoirs, fermés par des robinets R et R′, permettent de remplir de liquide l'un et l'autre cylindre. On obtient ainsi une bouteille de Leyde dont les armatures, constituées par le liquide, peuvent être chargées par une machine électrique en faisant communiquer les pôles de cette machine avec les fils de platine *e* et *f*. Quand on charge la bouteille le niveau

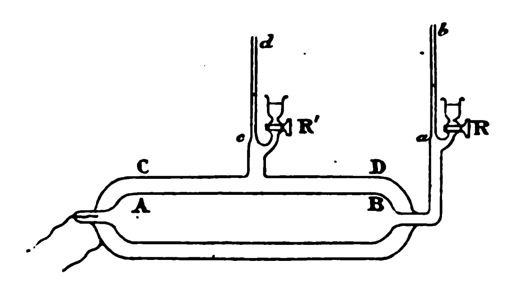


Fig. 36.

s'abaisse lentement dans le tube *ab* et s'élève dans le tube *cd;* lorsqu'on décharge la bouteille les niveaux reprennent, à très peu près, leurs positions primitives. L'élévation du niveau dans le tube *cd* pendant la charge montre bien que le phénomène est dû à une déformation du cylindre AB ayant pour effet d'augmenter son volume intérieur et non à une contraction du liquide.

M. Duter a trouvé que les variations de volume sont proportionnelles au carré de la différence de potentiel des armatures et en raison inverse de l'épaisseur du verre du tube AB.

243. *Expériences de M. Righi.* — M. Righi [1] emploie un tube de verre de 1 mètre de longueur recouvert, intérieure-

[1] *Comptes rendus* t. LXXXVIII, p. 1262; 1879; *Journal de Physique*, 1° série, t. IX.

ment et extérieurement, d'étain. Lorsqu'on charge le condensateur ainsi formé, le tube de verre s'allonge et cet allongement est amplifié au moyen d'un levier dont la petite branche s'appuie contre l'extrémité du tube de verre et dont la grande porte un miroir. Un rayon lumineux, réfléchi par ce miroir, donne une image dont le déplacement sur une échelle divisée permet d'évaluer l'allongement du tube.

M. Righi trouve que cet allongement est proportionnel au carré de la différence de potentiel et en raison inverse de l'épaisseur du tube.

244. *Expériences de M. Quincke.* — M. Quincke [1] a fait de nombreuses expériences avec l'un et l'autre des dispositifs précédents. Comme MM. Duter et Righi, il a trouvé que les variations de volume et de longueur sont proportionnelles au carré de la différence de potentiel, mais, contrairement aux conclusions de ces physiciens, il croit pouvoir déduire de ses expériences que ces variations sont inversement proportionnelles au carré de l'épaisseur du tube de verre employé.

En comparant la variation de volume et la variation de longueur obtenues avec un même tube de verre, M. Quincke a reconnu que la variation de volume rapportée à l'unité de volume est le triple de la variation de l'unité de longueur.

245. M. Quincke s'est également occupé des diélectriques liquides [2] et il a pu mesurer la valeur des pressions qui s'exercent normalement aux lignes de force.

[1] *Sitzungsberichte der K. P. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*; 1880.

[2] *Wiedemann Annalen*, t. XIX, p. 705, 1883; t. XXVIII, p. 529, 1886; . XXXII, p. 530, 1887.

Son appareil se compose d'un condensateur plan dont les armatures A et B (*fig.* 37) sont placées dans un vase contenant un liquide diélectrique, de l'essence de térébenthine, par exemple. Le support du plateau inférieur B est isolant. Du centre du plateau supérieur s'élève un tube vertical qui com-

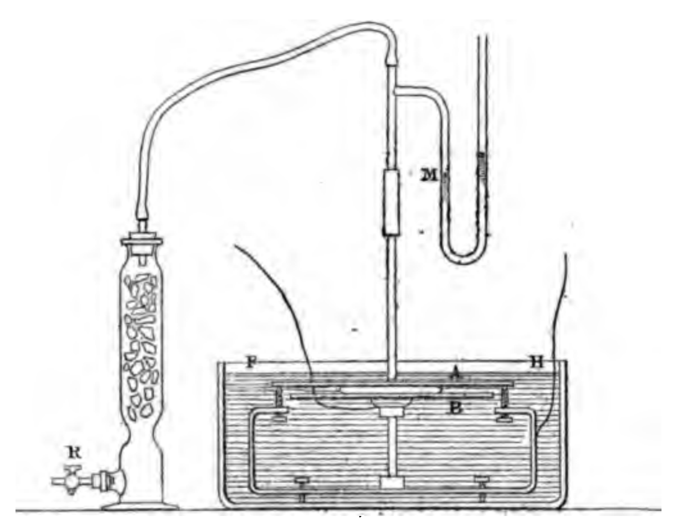


Fig. 37.

munique, d'une part, avec un manomètre M contenant un liquide de faible densité, d'autre part, avec un tube desséchant à chlorure de calcium portant un robinet R.

Les deux plateaux étant en communication avec la terre, on insuffle par R, au moyen d'une poire en caoutchouc, de l'air sec dans l'intervalle des deux plateaux, de manière à former une bulle plate de 2 à 3 centimètres de diamètre. La pression de l'air dans cette bulle est supérieure à la pression atmosphérique et l'excès dépend de la hauteur du niveau FH au-dessus de A, ainsi que de la constante capillaire du liquide.

Si alors on charge le condensateur, la pression P du liquide, perpendiculairement aux lignes de force, l'emporte sur la pression électrique correspondante P′ de l'air de la bulle, et celle-ci se contracte. Il doit en résulter un accroissement de pression $P'' = P - P'$; c'est en effet ce qu'indique le manomètre.

246. D'après Maxwell les pressions P et P′ ont pour valeurs (**81**),

$$P = -\frac{KF^2}{8\pi}, \qquad P' = -\frac{K'F^2}{8\pi},$$

K étant le pouvoir inducteur du liquide, et K′ celui de l'air et F l'intensité du champ entre les armatures du condensateur. K′ étant voisin de l'unité, nous pouvons écrire

$$P'' = P - P' = -\frac{K-1}{8\pi} F^2.$$

Dailleurs, si on désigne par e la distance des armatures et par ψ_1 et ψ_2 leurs potentiels, on a très sensiblement

$$F = \frac{\psi_1 - \psi_2}{e}$$

et par conséquent

$$P'' = -\frac{K-1}{8\pi}\frac{(\psi_1 - \psi_2)^2}{e^2}$$

On voit par cette formule que la variation de pression indiquée par le manomètre doit être proportionnelle au carré de la différence de potentiel des armatures et en raison inverse du carré de leur épaisseur. C'est ce qui a été vérifié par M. Quincke.

247. *Expériences de M. Boltzmann.* — Des recherches de M. Boltzmann sur le pouvoir inducteur spécifique des gaz (1), il est possible, de déduire, comme le fait M. Lippmann (2), qu'un gaz soumis à l'action d'un champ électrique éprouve de ce fait, des variations de volume lorsque la pression demeure constante.

L'appareil employé par M. Boltzmann se compose de deux plateaux métalliques A et B placés sous une cloche dans laquelle on peut faire le vide; des écrans métalliques protègent ces plateaux contre toute influence extérieure. Le plateau A est relié d'une manière permanente au pôle positif d'une pile de 300 éléments Daniell dont l'autre pôle communique avec le sol; le plateau B communique avec une des paires de quadrants d'un électromètre de M. Mascart dont l'aiguille est électrisée et dont l'autre paire de quadrants communique avec le sol.

L'appareil étant rempli de gaz, on met le plateau B en communication avec le sol pendant un instant; les deux paires de quadrants de l'électromètre étant alors au potentiel du sol l'aiguille se met au zéro. Ensuite on fait le vide dans l'appareil, l'influence du plateau A sur le plateau B n'étant plus la même, l'aiguille de l'électromètre dévie. De cette déviation il est possible de déduire, par le calcul, la relation qui lie la capacité C_0 du condensateur dans le vide à sa capacité C dans un gaz où la pression est p. M. Boltzmann a trouvé pour cette relation.

$$C = C_0 (1 + \gamma p)$$

γ étant une constante dépendant de la nature du gaz.

(1) *Wiener Sitz. berichte*, t. XLIX, p. 795, 1874.
(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 45.

248. Si nous désignons par m la charge d'un des plateaux du condensateur et par ψ la différence de potentiel de ces plateaux, nous avons :

$$m = C\psi = C_0 (1 + \gamma p) \psi \tag{1}$$

Pour des accroissements $d\psi$ et dp de la différence de potentiel et de la pression, cette charge croîtra de

$$dm = \frac{dm}{d\psi} d\psi + \frac{dm}{dp} dp$$

ou

$$dm = c d\psi + h dp, \tag{2}$$

en désignant respectivement par c et h les dérivées partielles de m par rapport à ψ et p, dérivées dont les valeurs se déduisent de (1).

Mais, d'après le principe de la conservation de l'électricité, l'expression (2) doit être une différentielle exacte ; nous avons donc :

$$\frac{dc}{dp} = \frac{dh}{d\psi}. \tag{3}$$

Appliquons maintenant le principe de la conservation de l'énergie. Soit dv l'accroissement de volume résultant de l'augmentation dp de la pression ; par suite de cette variation de volume l'énergie potentielle du système augmente de $-pdv$. La variation d'énergie électrique du condensateur résultant de l'accroissement dm de la charge des armatures est ψdm. Par conséquent la variation totale de l'énergie potentielle du système pour des accroissements simultanés de la pression et

de la différence de potentiel est:

$$dU = -pdv + \psi dm.$$

En remplaçant dans cette expression dm par sa valeur déduite de (1) et exprimant ensuite que dU est une différentielle exacte, nous obtenons

$$h + \frac{dv}{d\psi} = \psi\left(\frac{dc}{dp} - \frac{dh}{d\psi}\right)$$

ou, en tenant compte de la relation (3),

$$\frac{dv}{d\psi} = -h.$$

249. La variation de volume résultant d'un accroissement $d\psi$ de la différence de potentiel, la pression étant maintenue constante, est donc:

$$dv = -hd\psi$$

ou en remplaçant h par sa valeur tirée de (1),

$$dv = -C_0\gamma d\psi.$$

Par conséquent quand la différence de potentiel passe brusquement de 0 à ψ, cette variation de volume est

$$\Delta v = -\frac{C_0\gamma}{2}\psi^2.$$

Si nous désignons par S la surface des plateaux et par e leur distance, le volume de gaz soumis à l'action électrique a

pour valeur

$$v = Se,$$

et la capacité C_0 du condensateur dans le vide est donnée par

$$C_0 = \frac{S}{4\pi e}.$$

Si nous remplaçons C_0 par cette valeur dans l'expression précédente de Δv et si nous divisons par v nous obtenons pour la variation de volume rapportée à l'unité

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\gamma}{8\pi}\frac{\psi^2}{e^2};$$

elle est donc proportionnelle au carré de la différence de potentiel et en raison inverse du carré de l'épaisseur de la couche gazeuse soumise à l'action du champ.

Les nombres donnés par M. Boltzmann pour la valeur du produit γp permettent de calculer cette variation de volume. Elle est excessivement petite, toutefois elle a été constatée directement par l'expérience, par M. Quincke.

250. Discussion des résultats des expériences précédentes. — Dans toutes les expériences que nous venons de rapporter les variations de volume ou de longueur sont toujours proportionnelles au carré de la différence de potentiel. D'autre part, dans le cas des gaz et des liquides elles sont en outre inversement proportionnelles au carré de la distance des armatures des condensateurs employés ; dans le cas des solides, cette dernière propriété n'est pas nettement établie, mais elle semble néanmoins résulter des travaux de Quincke.

Si nous l'admettons les résultats de ces diverses expériences concordent avec la théorie des diélectriques de Maxwell. En effet les tensions et les pressions étant dans cette théorie proportionnelles au carré de l'intensité F du champ, les variations de volume et de longueur d'un corps soumis à ces pressions doivent être proportionnelles à F^2, c'est-à-dire à $\frac{\psi^2}{e^2}$ puisque dans les conditions des expériences l'intensité du champ a pour valeur $\frac{\psi}{e}$.

Remarquons en outre que les expériences de M. Righi et celles de M. Quincke sur les liquides montrent clairement que dans les directions normales aux lignes de force du champ ce sont bien des pressions qui s'exercent sur les diélectriques. Mais que peut-on en conclure relativement aux forces qui s'exercent suivant les directions mêmes des lignes de forces?

251. De ses expériences sur le verre, M. Quincke avait cru pouvoir déduire que les diélectriques, au moins les solides, sont soumis à des pressions suivant n'importe quelle direction.

Nous savons qu'un des résultats de ces expériences est que, pour un même tube de verre la variation de l'unité de volume est égale trois fois à celle de l'unité de longueur, c'est-à-dire, en désignant par v le volume et l la longueur,

$$\frac{\Delta v}{v} = 3\,\frac{\Delta l}{l}.$$

C'est l'analogie de cette relation avec celle qui lie les coefficients de dilatation thermiques, cubique et linéaire, qui a fait penser à M. Quincke que sous l'action d'un champ élec-

trique le verre se dilate également dans toutes les directions et que, par suite, il existe des pressions aussi bien dans la direction des lignes de force que dans les directions normales à ces lignes.

Mais, comme l'a fait remarquer M. J. Curie, cette relation peut s'établir *a priori*, et sa vérification par l'expérience ne prouve nullement qu'il y ait pression suivant les lignes de force.

Soit, en effet, une enveloppe de verre ayant un volume intérieur v et soit l une longueur tracée sur sa paroi latérale. Supposons que l'enveloppe, en *conservant la même épaisseur*, éprouve une dilatation latérale uniforme. La surface de l'enveloppe reste semblable à elle-même et nous avons

$$\frac{v + \Delta v}{v} = \left(\frac{t + \Delta l}{l}\right)^3,$$

ou

$$\frac{\Delta v}{v} = 3\frac{\Delta l}{l}$$

en négligeant les quantités du second ordre.

Nous avons supposé que l'épaisseur restait constante. Mais dans le cas où cette épaisseur e varierait de Δe sous l'influence de tensions ou de pressions, la relation précédente ne cesserait pas d'être d'accord avec l'expérience. En effet, la variation de volume résultant de cette variation d'épaisseur est égale au produit de $\frac{\Delta e}{e}$ par le volume du verre qui forme l'enveloppe, tandis que la variation de volume provenant de la dilatation latérale est égale au produit de $\frac{3\Delta l}{l}$ par le volume intérieur de

l'enveloppe. Si donc $\frac{\Delta e}{e}$ et $\frac{\Delta l}{l}$ sont du même ordre de grandeur, comme cela devrait avoir lieu d'après les valeurs des pressions et des tensions, la variation de volume due au premier phénomène est négligeable par rapport à celle qui résulte du second, le volume du verre de l'enveloppe étant nécessairement beaucoup plus petit que le volume intérieur.

En résumé l'expérience met hors de doute l'existence des pressions normales aux lignes de force, et jusqu'ici, elle ne contredit pas celle des tensions suivant les lignes de force ; de nouveaux travaux seraient nécessaires pour éclaircir ce dernier point.

252. Double réfraction électrique. — Aux phénomènes de déformation électrique se rattachent immédiatement les phénomènes de double réfraction que présentent les diélectriques homogènes soumis à l'action d'un champ électrique. On sait en effet qu'un corps solide homogène, comme le verre, devient biréfringent lorsqu'on le soumet dans une seule direction à une traction ou à une compression.

La double réfraction électrique a été découverte en 1875 par M. Kerr ([1]). Une lame de verre rectangulaire est percée, parallèlement à sa plus grande dimension, de deux trous dont les axes sont dans le prolongement et dont les fonds sont à quelques millimètres l'un de l'autre. Dans ces trous on introduit deux tiges de cuivre mises en relation avec les pôles d'une bobine de Ruhmkorff ; ces pôles sont en outre réunis aux deux branches d'un excitateur où jaillissent les étincelles.

([1]) *Philosophical Magazine*, 4e série, t. L, p. 337 et 446 (1875) ; 5e série t. VIII, p. 85 (1879) ; t. IX, p. 157

La lame ainsi disposée est placée dans le sens de son épaisseur entre un polariseur et un analyseur ; on règle la position du polariseur de telle sorte que le plan de polarisation de la lumière qui tombe sur la lame soit à 45° de l'axe des deux trous qui y sont percés ; enfin on tourne l'analyseur de façon qu'il y ait extinction de la lumière quand la bobine ne fonctionne pas.

Lorsqu'on met en marche la bobine la lumière reparaît lentement dans le champ de l'analyseur et atteint son maximum au bout de 30 secondes environ; de plus elle ne peut être éteinte par la rotation de l'analyseur mais on ramène facilement l'extinction en interposant une lame de verre que l'on étire perpendiculairement à la direction des conducteurs qui amènent le courant. La lame de verre soumise à l'action des décharges se comporte donc comme si elle était soumise à une tension suivant les lignes de force.

La résine présente un phénomène analogue.

253. M. Kerr a également opéré sur divers liquides. Une petite cuve rectangulaire contient le liquide. Deux trous percés dans deux parois opposées laissent passer les conducteurs dont les extrémités, plongées dans le liquide, sont à quelques millimètres de distance ; on règle l'écartement des branches de l'excitateur de telle sorte que les décharges ne s'effectuent pas à travers le liquide. Les phénomènes ne diffèrent de ceux que présente le verre qu'en ce qu'ils sont instantanés ; ils disparaissent au moment même où les décharges se produisent entre les branches de l'excitateur.

Ayant mesuré la différence de marche des deux rayons lumineux qui se propagent à travers le sulfure de carbone au

moyen d'un compensateur Jamin et la différence de potentiel ψ correspondante avec un électromètre à longue échelle de sir W. Thomson, M. Kerr a reconnu que la différence de marche est proportionnelle à $\frac{\psi^2}{e^2}$, e étant la distance des électrodes.

Les expériences de M. Kerr ont été répétées par divers physiciens notamment par M. Quincke et par M. Blondlot ([1]). Le premier s'est attaché à vérifier la proportionnalité de la différence de marche au carré de la différence de potentiel ; le second à vérifier que dans le cas des diélectriques liquides la double réfraction se produit et cesse en même temps que l'action électrique ([2]).

([1]) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 349; 1888.

([2]) Toutes ces vérifications, si intéressantes à divers points de vue, ne me paraissent pas absolument concluantes. Les pressions observées sont bien, comme l'exige la théorie, proportionnelles au carré de la différence de potentiel, mais le coefficient de proportionalité observé, variable avec le diélectrique considéré, n'est pas égal au coefficient calculé. M. Vaschy (*Comptes rendus*, tome CIV) a cherché à rendre compte de ce fait de la manière suivante. Appelons F la force électrostatique; K, le pouvoir inducteur du diélectique considéré, K_1 celui du vide. La pression est $p = K \frac{F}{8\pi}$ dans le diélectrique, elle serait $p_1 = K_1 \frac{F^2}{8\pi}$ dans le vide. M. Vaschy admet que l'éther subit la pression p_1 et que la matière pondérable subit la pression $p - p_1$ qui est la pression observée. Tant que des mesures directes ne l'ont pas confirmée, cette conjecture de M. Vaschy reste très douteuse ; la comparaison avec le phénomène optique de l'entraînement de l'éther (Cf. *Théorie mathématique de la lumière*, page 382) ne suffit pas pour l'imposer.

D'ailleurs Helmholtz a démontré que, quelle que soit la théorie adoptée, le principe de la conversation de l'énergie nécessite l'existence de pressions et de tensions à l'intérieur des diélectriques; ces pressions et ces tensions doivent varier comme le carré de la différence de potentiel et dépendre en outre du pouvoir inducteur, *et de sa dérivée par rapport à la densité du diélectrique.* Les expériences précédentes devaient donc donner le même résultat, que les idées de Maxwell soient vraies ou fausses.

Quant à la double réfraction [illegible] rien moins que certain

254. Pressions dans un champ magnétique. — Nous avons vu (**207**) que dans un milieu non magnétique les tensions suivant les lignes de force du champ et les pressions suivant les directions normales à ces lignes ont pour valeurs $\frac{\alpha^2}{8\pi}$. On s'assurerait facilement que dans un milieu de perméabilité magnétique μ ces pressions et tensions sont données par l'expression $\frac{\mu}{8\pi}\alpha^2$.

M. Quincke (¹) a pu mesurer les pressions normales aux lignes de force au moyen d'un dispositif analogue à celui que

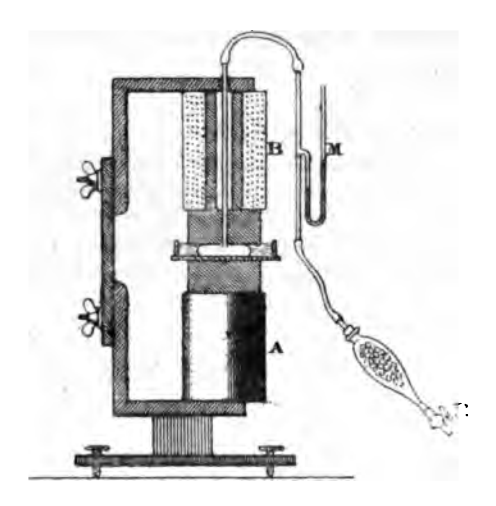


Fig. 38.

nous avons décrit à propos des diélectriques liquides soumis à l'action d'un champ électrique.

qu'elle puisse s'expliquer par une simple déformation mécanique. Elle est probablement plus considérable que celle que produiraient des pressions mécaniques égales aux pressions électrostatiques observées. H. P.

(¹) *Wiedemann Annalen*, t. XXIV, p. 347; 1885.

Deux pièces polaires cylindriques sont vissées sur les extrémités des bobines A et B (*fig.* 38) d'un électro-aimant de Ruhmkorff disposé verticalement. Sur la pièce polaire de la bobine inférieure est placé un disque de fer et sur ce disque on fixe, au moyen de cire à cacheter un large anneau de verre de quelques centimètres de hauteur. Au fond de la cuvette ainsi formée on place une vessie pleine d'air; cette vessie communique par un tube de cuivre, qui traverse la pièce polaire et la bobine supérieure, avec un manomètre à sulfure de carbone M et avec un tube renflé contenant du chlorure de calcium et fermé par un robinet R. On remplit ensuite la cuvette d'un liquide magnétique ou diamagnétique, le chlorure de manganèse par exemple, et on rapproche les pièces polaires jusqu'à une distance convenable. Enfin, au moyen d'une poire en caoutchouc, on insuffle de l'air par le robinet R, de manière que les parois de la vessie s'appliquent contre les faces polaires ; on ferme le robinet R et on lit la pression dans le manomètre.

Quand on fait passer le courant dans les spires de l'électro-aimant le liquide éprouve une pression transversale

$$P = \frac{\mu}{8\pi} \alpha^2,$$

et l'air de la vessie une pression

$$P' = \frac{1}{8\pi} \alpha^2.$$

La différence de ces deux pressions

$$P'' = P - P' = \frac{\mu - 1}{8\pi} \alpha^2$$

est celle qui est indiquée par la variation des niveaux du liquide manométrique. On voit qu'elle doit être proportionnelle au carré de l'intensité du champ.

En mesurant l'intensité du champ au moyen de la quantité d'électricité induite dans un spirale que l'on retire brusquement du champ, M. Quincke a constaté que cette proportionnalité se vérifie assez exactement. D'ailleurs, la mesure de la pression et celle de l'intensité du champ ne pouvant avoir lieu en même temps, on ne peut affirmer que cette dernière quantité possède au moment où l'on observe la pression la valeur mesurée antérieurement : on sait, en effet, que le champ d'un électro-aimant possède généralement des valeurs différentes dans deux expériences où cependant la distance des pôles et l'intensité du courant excitateur sont les mêmes. En outre M. Quincke a constaté que les armatures changent de forme par l'aimantation et se rapprochent l'une de l'autre ; il résulte de cette action un changement notable du volume de la vessie et par suite une variation de la pression de l'air qu'elle contient. Pour ces deux raisons il ne peut y avoir un accord complet entre la formule théorique et l'expérience.

255. Au lieu de se servir d'un manomètre pour mettre en évidence les pressions magnétiques, on peut employer des tubes en U contenant un liquide. On dispose alors l'électro-aimant de manière que ses faces polaires soient verticales et on place entre elles une des branches du tube. L'autre branche, beaucoup plus large que la première, est située hors du champ magnétique. Dès qu'on excite l'électro-aimant le niveau monte dans la branche soumise à l'action du champ; dans l'autre branche, sa variation est inappréciable, par suite de la

grandeur du diamètre de cette branche. Les résultats obtenus au moyen de ce dispositif concordent avec ceux que donne la méthode du manomètre.

La méthode du tube en U a permis à M. Quincke de rechercher s'il y avait tension ou pression suivant les lignes de force du champ. A cet effet, l'électro-aimant étant disposé verticalement, on introduit la petite branche du tube dans le canal de la bobine supérieure de manière que le niveau du liquide se trouve au milieu du champ magnétique. M. Quincke a reconnu ainsi que suivant la direction des lignes de force le liquide est soumis à des pressions. Ce résultat, contraire à la théorie, aurait besoin d'être confirmé.

256. Actions électromagnétiques des courants de déplacement. — Les actions électromagnétiques des courants de déplacement sont difficiles à mettre en évidence, car, en outre que ces courants sont instantanés, aucun dispositif ne permet de multiplier leur action sur l'aiguille aimantée, comme cela a lieu dans le galvanomètre pour les courants de conduction. On ne peut, non plus, faire usage de courants mixtes formés à la fois de courants de déplacement et de courant de conduction car l'action électromagnétique de ceux-ci, toujours prépondérante, cacherait entièrement celles des courants de déplacement. Aussi, n'est-ce qu'en 1885 que M. Roentgen (1) a tenté de montrer expérimentalement l'existence de l'action électromagnétique des courants de déplacement.

L'appareil de M. Roentgen se compose d'un disque d'ébo-

(1) *Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, 26 février 1885; et *Philosophical Magazine*, mai 1885.

tite A (*fig.* 39) de 0cm,5 d'épaisseur sur 16 centimètres de diamètre, mobile autour d'un axe vertical et susceptible de prendre des vitesses de 120 à 150 tours par seconde. Deux plateaux de verre B et C sont disposés parallèlement au disque, l'un au-dessous, l'autre au-dessus ; leurs faces internes

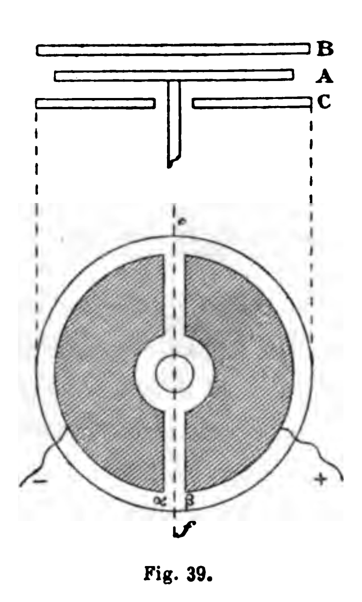


Fig. 39.

sont revêtues de feuilles d'étain et sont séparées du disque par un intervalle de 1 millimètre. Les feuilles d'étain collées sur le plateau inférieur forment deux demi-couronnes séparées par intervalle de 1cm,4 de largeur ; elles communiquent respectivement avec les armatures interne et externe d'nne batterie chargée. La partie métallique du plateau supérieur communiquant avec le sol, le champ électrique entre les plateaux B et C possède des directions inverses de part et d'autre du diamètre *ef* du plateau inférieur ; par conséquent, dans les

régions voisines du plan vertical passant par ce diamètre les lignes de force passent rapidement d'une direction à une direction opposée. Quand on fait tourner le disque d'ébonite des courants de déplacement prennent donc naissance dans ces régions ; ces courants ont d'ailleurs des sens différents de part et d'autre du centre de ce disque.

257. Il est possible d'évaluer l'intensité de ces courants. Nous savons que le déplacement est donné par

$$f = \frac{K}{4\pi} P$$

où P est la force électromotrice par unité de longueur ; nous avons donc pour l'intensité

$$\frac{df}{dt} = \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt}$$

Or, dans l'intervalle de temps nécessaire pour que le disque mobile décrive un arc égal à la distance $\alpha\beta$ qui sépare les extrémités des demi-couronnes métalliques du plateau inférieur, P varie d'une certaine valeur F à une valeur ne différant que par le signe — F; nous pouvons donc prendre $dP = 2F$. Le temps correspondant à cette variation de la force électromotrice est

$$\frac{1}{n} \frac{\alpha\beta}{2\pi r}$$

n étant le nombre de tours du disque par seconde et r le rayon extérieur des demi-couronnes; en remplaçant ces

quantités par leurs valeurs on trouve

$$\delta = \frac{1}{150}\,\frac{1,5}{[illegible]} = \frac{1}{140}\ \text{environ}.$$

Nous avons donc pour la limite du courant de déplacement

$$\frac{[illegible]}{r^2} = \frac{K}{[illegible]}\ [illegible] \times 140$$

ou en prenant $K = 2$

$$\frac{[illegible]}{r^2} = [illegible] \cdot 140.$$

Si nous ne prenons [illegible] une unité électrostatique de potentiel [illegible] 300 volts, on a pour l'intensité du courant en unités électrostatiques

[illegible]

[illegible] unités électrostatiques [illegible] $\frac{1}{[illegible]}$ ampères.

[illegible] la chaleur à [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] autre [illegible] [illegible] cette dernière [illegible] [illegible]

[illegible] du système [illegible]

tatique change de sens quand on intervertit les signes des charges qui se trouvent sur les demi-couronnes.

258. Actions inductives des courants de déplacement. — C'est à M. Hertz que l'on doit la preuve expérimentale de l'existence de ces actions. Ces expériences devant être analysées et discutées dans un prochain ouvrage en cours de préparation, nous ne ferons que les signaler.

FIN

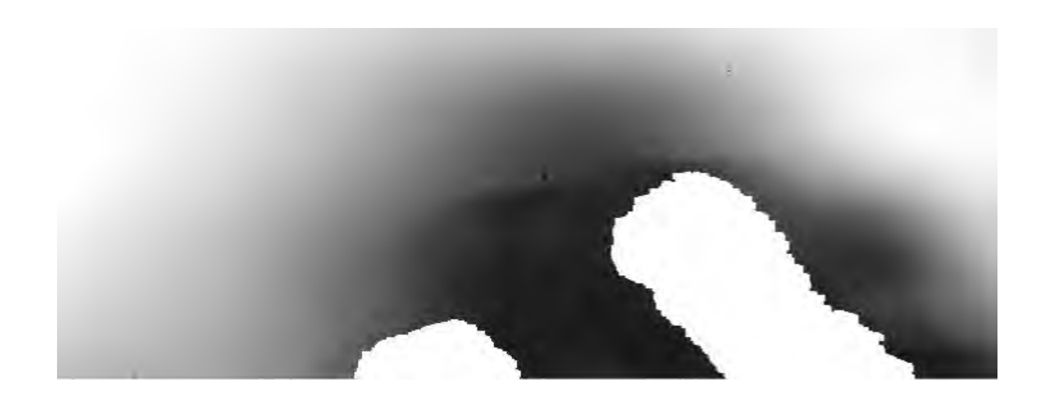


TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

Théorie des diélectriques de Poisson
Comment elle peut se rattacher à celle du fluide inducteur

CHAPITRE IV

Déplacement des conducteurs sous l'action des forces électriques
Théorie particulière à Maxwell

CHAPITRE V

Électro-kinétique

CHAPITRE VI

Magnétisme

CHAPITRE ~~VIII~~ VII.

Électromagnétisme

CHAPITRE VIII

Électrodynamique

CHAPITRE IX

Induction

CHAPITRE X

Équations générales du champ magnétique

CHAPITRE XI

Théorie électromagnétique de la lumière.

CHAPITRE XII

Polarisation rotatoire magnétique

CHAPITRE XIII

Vérifications expérimentales des hypothèses de Maxwell

Tours. — Imprimerie DESLIS FRÈRES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ
ET OPTIQUE

II

LES THÉORIES DE HELMHOLTZ
ET LES EXPÉRIENCES DE HERTZ

Leçons professées pendant le second semestre 1889-90

PAR **H. POINCARÉ**, MEMBRE DE L'INSTITUT

Rédigées par **Bernard BRUNHES**
Ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé de l'Université

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
-André-des-Arts, 58

PRÉFACE

Ce second volume contient les leçons que j'ai professées à la Sorbonne du mois de mars au mois de juin 1890 et qui ont été recueillies et rédigées par M. Brunhes. Je commence par lui en exprimer toute ma reconnaissance.

La première partie est consacrée aux théories d'Ampère et de Weber, la seconde à la théorie de Helmholtz qui contient comme cas particuliers celles de Neumann, de Weber et de Maxwell. J'ai dû assez profondément modifier le mode d'exposition de Helmholtz ; ce savant emploie en effet des notations nouvelles tout à fait différentes de celles de Maxwell ;

l'identité des équations auxquelles conduisent les deux théories, dans le cas où elles sont d'accord, se trouve ainsi artificiellement dissimulée ; le but principal de Helmholtz est ainsi moins complètement atteint qu'il ne pourrait l'être. Mais ce n'est pas tout, Helmholtz emploie les unités électrostatiques, c'est-à-dire des unités telles que l'attraction de deux unités électriques à l'unité de distance soit égale à l'unité de force ; mais cette attraction dépend du pouvoir inducteur K du diélectrique dans lequel sont plongées ces deux masses électriques. L'unité électrostatique n'est donc pas la même selon qu'on la définit dans l'air, comme on le fait d'ordinaire, ou dans un autre milieu. L'unité de Helmholtz est définie, non dans l'air, mais dans un milieu impolarisable idéal qui dépend de l'hypothèse faite sur la valeur de l'un des deux coefficients numériques qui caractérisent la théorie. Cette unité est donc variable avec ce coefficient et dans le cas particulier où la théorie de Helmholtz est d'accord avec celle de Maxwell, *cette unité est nulle*. Il résulte de ces circonstances d'incessantes obscurités qui déroutent le lecteur. Mais ces difficultés sont pu-

rement artificielles. J'ai cherché à les éviter en prenant, comme Maxwell, les unités électromagnétiques.

La troisième partie du cours est consacrée à la théorie des expériences de Hertz. Beaucoup de personnes trouveront cette tentative bien prématurée et elles n'auront pas tort; je n'ai pu arriver à aucune conclusion définitive, les résultats expérimentaux ne le permettent pas encore. Aussi cette partie de l'ouvrage est destinée à vieillir rapidement et il faudra la recommencer dans quelques années. Mais l'importance de la question est assez grande pour que l'on prenne la peine de recommencer cette tâche plusieurs fois. Peut-être d'ailleurs les quelques tentatives que j'ai pu faire et les doutes même que j'exprime ne seront-ils pas sans utilité pour les chercheurs qui construiront l'édifice définitif.

Nous avons cru devoir ajouter aux leçons rédigées par M. Brunhes deux chapitres complémentaires. Le premier, qui contient la description succincte des expériences de Hertz est l'œuvre personnelle de M. Blondin. Il avait été rédigé d'abord pour être joint au premier volume qui contient les leçons professées de

mars à juin 1888 (*et non 1889 comme la couverture de ce premier volume le porte par erreur*). Il trouve mieux sa place à côté de la théorie détaillée de ces mêmes expériences.

D'autre part j'ai terminé par un chapitre complémentaire que les progrès rapides de la science avaient rendu nécessaire. Entre le moment où j'ai clos le cours et celui où le manuscrit a été livré à l'impression, c'est-à-dire entre les mois de juin et de novembre 1890, diverses publications, et en particulier celle des nouvelles expériences de MM. Sarrasin et de la Rive ont modifié mes idées sur certains points.

INTRODUCTION

Quelques mots des notations employées dans cet ouvrage. Je désignerai habituellement par x, y, z, les coordonnées du point attiré, par x', y', z', celles du point attirant, par r la distance de ces deux points. Je représenterai un élément de volume par $d\tau$ ou par $d\tau'$ suivant que j'aurai appelé le centre de gravité de cet élément, x, y, z ou x', y', z'. De même un élément de surface s'appellera $d\omega$ et ses cosinus directeurs l, m, n, si son centre de gravité s'appelle x, y, z; il s'appellera $d\omega'$, et ses cosinus directeurs l', m', n' s'il a pour centre de gravité le point x', y', z'. Je suivrai la même règle pour une fonction quelconque; si par exemple j'appelle ρ la densité électrique au point x, y, z, j'appellerai ρ' la densité électrique au point x', y', z'.

Je ferai un fréquent usage de la formule de Maxwell (Voir le 1er volume de cet ouvrage, § 117, page 130) qui permet de transformer une intégrale de ligne en intégrale de surface et réciproquement.

J'emploierai aussi la méthode de l'intégration par parties appliquée aux intégrales multiples.

C'est ainsi qu'on aura par exemple :

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = \int luv d\omega - \int v \frac{du}{dx} d\tau.$$

Les intégrales prises par rapport à $d\tau$ sont étendues à un volume quelconque et la première intégrale du second membre à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui limite ce volume et dont l, m, n sont les cosinus directeurs.

Il arrivera souvent que les fonctions u, v que nous aurons à considérer s'annuleront à l'infini. Alors je pourrai écrire :

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = -\int v \frac{du}{dx} d\tau$$

les intégrations étant étendues à l'espace tout entier.

C'est ce que j'appellerai *intégrer par parties dans tout l'espace*.

Ces transformations supposent les fonctions continues. Il n'en sera pas toujours ainsi. Il arrivera souvent qu'à la surface de séparation de deux milieux, par exemple d'un conducteur et d'un diélectrique, certaines des fonctions que nous aurons à considérer seront discontinues. On pourrait faire le calcul complètement en tenant compte de ces discontinuités et on verrait que les résultats ne sont pas changés.

Mais il est plus simple de tourner la difficulté. Il suffit pour cela de supposer que deux milieux différents ne sont pas séparés par une surface géométrique, mais par une couche de passage très mince, où les propriétés de la matière varient d'une manière très rapide mais continue. Il est assez probable qu'il en est effectivement ainsi ; mais quoi qu'il en soit de la réalité, il est clair que l'on peut substituer l'hypothèse de la couche de passage à celle de la séparation brusque sans altérer aucun résultat expérimentalement vérifiable, puisque l'épaisseur de cette couche peut toujours être supposée très petite.

CHAPITRE I

FORMULE D'AMPÈRE

1. Action de deux éléments de courant. — Ampère avait la prétention de ne rien emprunter qu'à l'expérience [1]. Cette prétention n'est pas absolument justifiée, car l'expérience ne peut porter sur deux éléments de courant. On peut observer l'action d'un courant fermé sur une portion de courant, mais non l'action d'une portion de courant sur une autre.

Si, en effet, la décharge d'un condensateur par exemple constitue un courant qui d'après les idées antérieures à Maxwell n'est pas fermé, ce courant est de trop courte durée pour qu'on puisse l'utiliser dans les expériences. On ne peut donc expérimenter que sur des courants fermés; on peut, il est vrai, par divers artifices, rendre mobile une portion d'un des courants, ce qui permet d'étudier l'action d'un courant fermé sur une portion de courant (voir ce sujet discuté plus

[1] Le titre de son ouvrage est : *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience*, 1826.

loin, § 19); mais cette portion mobile reste toujours soumise à l'action simultanée de tous les éléments de l'autre courant fermé.

Ampère qui énonce une loi applicable à deux éléments de courant a dû par conséquent faire des hypothèses :

1° Pour avoir l'action d'un circuit fermé sur un élément de courant, il suffit de composer les actions des éléments de ce circuit fermé sur l'autre élément ;

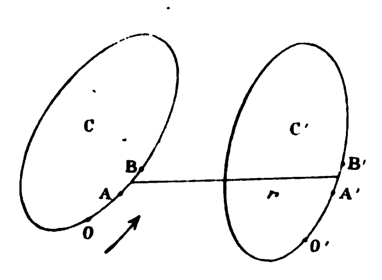
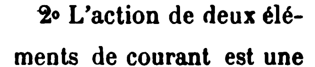


Fig. 1.

2° L'action de deux éléments de courant est une force dirigée suivant la droite qui les joint.



Soient deux circuits C et C'. Soit A un point de C. Je définis le point A par la longueur s de l'arc OA comptée à partir du point fixe O.

Soient AB et A'B' deux éléments appartenant respectivement à C et à C'. Soit O' un point fixe de C' à partir duquel nous compterons les arcs.

$$\text{Soient OA} = s; \qquad \text{OB} = s + ds$$
$$\text{O'A'} = s'; \qquad \text{O'B'} = s' + ds'$$

d'où

$$\text{AB} = ds. \text{ De même A'B'} = ds'.$$

Soient x, y, z les coordonnées de A

$x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, celles de B

x', y', z' A'

$+ dz'$ B'

La distance des deux éléments AB et A'B' est donnée par

$$(1) \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

r est fonction de s et s'

Les cosinus directeurs de AB sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$

de A'B' $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$

de AA' $\frac{x'-x}{r}, \frac{y'-y}{r}, \frac{z'-z}{r}$

Soient θ l'angle de AB avec AA'

θ' A'B' avec AA'

ε des deux éléments AB et A'B'

On a :

$$(2) \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{x'-x}{r} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{y'-y}{r} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{z'-z}{r} \\ \cos\theta' = \frac{dx'}{ds'}\cdot\frac{x'-x}{r} + \frac{dy'}{ds'}\cdot\frac{y'-y}{r} + \frac{dz'}{ds'}\cdot\frac{z'-z}{r} \\ \cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'} \end{cases}$$

Entre ces trois cosinus et les dérivées de la fonction r existent certaines relations.

On trouve en effet par différentiation :

$$(3) \qquad r\frac{dr}{ds} = \sum (x - x')\frac{dx}{ds}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dr}{ds} = \sum \frac{x-x'}{r}\cdot\frac{dx}{ds} = -\cos\theta \\ \frac{dr'}{ds'} = \sum \frac{x'-x}{r}\cdot\frac{dx'}{ds'} = \cos\theta' \end{cases}$$

Différentions (3) par rapport à s'.

$$(5)\quad \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}+r\frac{d^2r}{dsds'}=-\sum\frac{dx'}{ds'}\cdot\frac{dx}{ds}=-\cos\varepsilon$$

d'où :

$$r\frac{d^2r}{dsds'}=\cos\theta\,\cos\theta'-\cos\varepsilon$$

L'action de ds sur ds' est évidemment proportionnelle aux longueurs ds et ds' des deux éléments et aux intensités i et i' des deux courants ; elle dépend d'autre part de la distance r des deux éléments et des angles θ, θ' et ε. Elle ne peut manifestement dépendre d'aucune autre quantité. Nous pouvons donc représenter cette action par la formule :

$$ii'dsds'f\,(r,\,\theta,\,\theta',\,\varepsilon)$$

et il nous reste à déterminer la fonction f.

Afin d'abréger les écritures nous supposerons :

$$i=i'=1$$

quitte à rétablir à la fin du calcul le facteur ii'.

Ampère a emprunté à l'expérience les trois principes suivants qui serviront de point de départ à l'analyse qui va suivre :

1° Le principe des courants sinueux ;

2° L'action d'un courant fermé sur un élément quelconque est normale à cet élément ;

3° L'action d'un solénoïde fermé sur un élément quelconque est nulle.

Soit $Adxds'$ l'action qu'exercerait sur ds' un élément de courant dx qui serait la projection de ds sur l'axe des x ; de même $Bdyds'$ et $Cdzds'$. Le *principe expérimental des courants*

sinueux qui est le premier emprunt fait par Ampère à l'expérience, nous apprend que l'action de ds est la résultante des actions de ses projections et, comme toutes ces forces sont dirigées suivant la même droite AA', on a :

$$f(r,\theta,\theta',\varepsilon)\,ds\,ds' = A\,dx\,ds' + B\,dy\,ds' + C\,dz\,ds'$$

$$f = A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} + C\frac{dz}{ds}$$

La fonction f est donc linéaire par rapport aux cosinus directeurs de AB.

La fonction f dépend de r, θ', θ et ε ; r et θ' ne dépendent pas des cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; $\cos\theta$ et $\cos\varepsilon$ sont linéaires et homogènes par rapport à ces cosinus. Donc f ne peut être linéaire et homogène par rapport à ces mêmes cosinus directeurs que si f est linéaire et homogène en $\cos\theta$ et $\cos\varepsilon$, ou, ce qui revient au même, en $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2r}{ds\,ds'}$.

Elle est de même linéaire et homogène en $\frac{dr}{ds'}$ et $\frac{d^2r}{ds\,ds'}$.

Donc elle doit être linéaire et homogène en $\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}$ d'une part et $\frac{d^2r}{ds\,ds'}$ d'autre part.

Donc :

$$(6)\qquad \begin{aligned} f\,ds\,ds' &= \left(A\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'} + B\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)ds\,ds' \\ &= \left[\psi(r)\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r)\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right]ds\,ds' \end{aligned}$$

A et B sont en effet fonctions de r seul, et je puis poser :

$$A = \psi(r) \qquad B = 2\varphi(r).$$

2. Pour déterminer ces fonctions, il faudra deux expériences. Ampère a montré qu'un arc de cercle quelconque mobile autour de son centre ne se déplace pas, l'action tangentielle exercée sur un élément quelconque de cet arc de cercle est donc nulle. Donc l'action d'un courant fermé sur un élément est normale à cet élément, c'est le second principe d'Ampère énoncé plus haut.

Donc l'intégrale :

$$ds' \int \left[\psi(r) \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r) \frac{d^2r}{dsds'} \right] \frac{dr}{ds'} ds = 0$$

l'intégrale étant prise le long du circuit C, qui est quelconque.

Posons :

$$\rho = \frac{dr}{ds'}$$

$$\int [\psi(r) \rho^2 dr + 2\varphi(r) \rho d\rho] = 0$$

La quantité sous le signe $\int$ est donc la différentielle exacte d'une fonction des deux variables indépendantes r et ρ, c'est-à-dire qu'on a :

$$2\rho\psi(r) = 2\rho\varphi'(r)$$

ou :

$$\psi(r) = \varphi'(r)$$

Il nous reste à déterminer la fonction φ, ce que le troisième principe expérimental d'Ampère nous permettra de faire ; en attendant, tirons toutes les conséquences des deux premiers principes et montrons d'abord que l'action élémentaire

$$\left[\varphi'(r) \frac{dr}{ds} \frac{dr'}{ds'} + 2\varphi(r) \frac{d^2r}{dsds'} \right] dsds'$$

peut se mettre sous la forme $V \frac{d^2U}{dsds'}$, V et U étant fonctions de r seul.

$$\frac{dU}{ds} = U' \frac{dr}{ds}, \text{ en écrivant } U' \text{ pour } \frac{dU}{dr}.$$

$$\frac{d^2U}{dsds'} = U' \frac{d^2r}{dsds'} + U'' \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$$

Je remplace et j'identifie :

$$VU'' = \varphi'$$
$$VU' = 2\varphi$$
$$\frac{U''}{U'} = \frac{\varphi'}{2\varphi}$$
$$\log U' = \frac{1}{2} \log \varphi$$
$$U' = \sqrt{\varphi}$$
$$V = 2\sqrt{\varphi} = 2U'$$

et l'action de deux éléments est mise ainsi sous la forme

$$2dsds'U' \frac{d^2U}{dsds'}.$$

3. Travail produit par un déplacement relatif de deux circuits. — Si nous donnons à r un accroissement δr, l'action de l'élément AB sur A'B' produira un certain travail. Nous choisirons les signes, suivant les conventions ordinaires en électrodynamique, de façon que la force soit positive quand elle est attractive; alors le travail élémentaire dû à une variation δr est :

$$-2dsds'U'\delta r. \frac{d^2U}{dsds'} = -2dsds'\delta U \frac{d^2U}{dsds'}$$

et le travail dû à l'action totale d'un des circuits sur l'autre est :

$$\delta T = -2 \int \int \delta U \frac{d^2U}{dsds'} dsds'$$

Transformons, en intégrant par parties.

$$\int u \frac{dv}{ds} ds = [uv] - \int v \frac{du}{ds} ds = -\int v \frac{du}{ds} ds$$

car le contour d'intégration qui n'est autre que le circuit C étant fermé, *uv* a la même valeur aux deux limites d'intégration.

$$-\int \delta U \frac{d^2U}{dsds'} ds = \int \frac{dU}{ds'} \frac{d\delta U}{ds} ds = +\int \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} ds$$

Donc :

$$\delta T = 2 \int \int \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} dsds'$$

et comme rien ne distingue C' de C on a aussi :

$$\delta T = 2 \int \int \frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} dsds'$$

Donc :

$$\delta T = \int \int \left[\frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} + \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} \right] dsds'$$

$$\delta T = \delta \int \int \frac{dU}{ds} \frac{dU}{ds'} dsds'$$

δT est l'accroissement de la fonction

$$(7) \qquad T = \int\int \frac{dU}{ds}\frac{dU}{ds'}\,ds\,ds'$$

Le travail élémentaire est donc la différentielle d'une fonction T dépendant seulement des positions relatives des deux circuits. Cette fonction ([1]) est le *potentiel électrodynamique mutuel* des deux circuits. Cette forme élégante donnée à l'expression du travail élémentaire est due à M. Bertrand ([2]).

4. Nous avons ainsi démontré l'existence d'un potentiel pour l'action de deux courants fermés, en nous appuyant simplement sur le fait que l'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à l'élément.

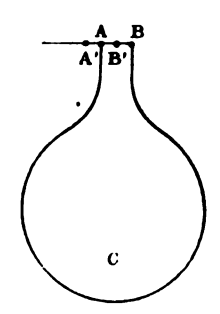


Fig. 2.

On peut, réciproquement, montrer que ce fait expérimental est une conséquence nécessaire de l'existence d'un potentiel.

Soit un élément AB, mobile suivant sa propre direction. S'il se déplace en A'B', le courant conserve la même position dans l'espace, il décrit le même circuit. Le potentiel électrodynamique, s'il existe, n'a pas varié, donc pas de travail, ce qui prouve que la force est normale au chemin parcouru.

([1]) Le travail est, *en grandeur et en signe*, l'accroissement du potentiel, si l'on convient, comme nous l'avons fait, de considérer comme positive une force attirante.

([2]) *Théorie mathématique de l'électricité* (1890), § 131, p. 175.

5. Détermination de la fonction U. — Pour aller plus loin, il faut de nouveau recourir à l'expérience. Nous nous appuierons sur ce fait que l'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant est toujours nulle.

On a :

$$T = \int\int \frac{dU}{ds}\frac{dU}{ds'}dsds' = \int\int U'^2 \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}dsds'$$

ou en tenant compte des équations (3) (page 4) :

$$T = \int ds \left[\frac{dx}{ds}\int U'^2 \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{x - x'}{r}ds' + \frac{dy}{ds}\int U'^2 \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{y-y'}{r}ds' + \frac{dz}{ds}\int U'^2 \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{z-z'}{r}ds'\right]$$

On peut écrire pour abréger :

$$T = \int(Fdx + Gdy + Hdz)$$

en posant :

$$(8)\qquad \begin{cases} F = \int U'^2 \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{x-x'}{r}ds' \\ G = \int U'^2 \frac{dr}{ds'}\frac{y-y'}{r}ds' \\ H = \int U'^2 \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{z-z'}{r}ds' \end{cases}$$

En effectuant les intégrations le long de C′ on peut écrire :

$$F = \int (x - x') \cdot \frac{U'^2}{r}\, dr = \int (x - x')\, f'(r)\, dr$$

en posant :

$$f'(r) = \frac{U'^2}{r}$$

Intégrons par parties : le terme fini est nul et l'on a :

(α.) $$F = -\int f(r) \frac{d\,(x - x')}{ds'}\, ds' = + \int f(r)\, dx'$$

car

$$\frac{d\,(x - x')}{ds'} = -\frac{dx'}{ds'}$$

Sous cette forme il est aisé de voir qu'on a :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \tag{9}$$

En effet

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{df(r)}{dx}\, dx' = -\int \frac{df(r)}{dx'}\, dx'$$

car

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'}$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -\int \left(\frac{df}{dx'} dx' + \frac{df}{dy'} dy' + \frac{df}{dz'} dz' \right) = -\int df = 0$$

Les quantités F, G, H définies plus haut sont ce que Maxwell appelle les composantes du *potentiel vecteur* dû à un courant d'intensité 1 parcourant le circuit C'. Pour avoir le potentiel vecteur dû à un courant d'intensité i parcourant le même circuit, il faudrait multiplier par i les intégrales (8).

6. Nous nous proposons maintenant de calculer le potentiel électrodynamique d'un solénoïde par rapport au courant C', et d'exprimer que ce potentiel est nul quand le solénoïde est fermé.

Nous avons trouvé :

$$T = \int (F dx + G dy + H dz)$$

F, G, H étant les composantes du potentiel vecteur dû à C' et l'intégrale étant prise le long de C.

Je vais d'abord transformer T en une intégrale étendue à l'aire d'une surface passant par le contour C et limitée à ce contour [1]

$$(10)\quad T = \int \left[l\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + m\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + n\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right) \right] d\omega$$

$d\omega$ étant un élément de l'aire considérée, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément.

Rappelons brièvement la définition d'un solénoïde. Un solénoïde est un ensemble d'une infinité de courants infiniment petits construits de la manière suivante :

Soit un arc de courbe quelconque que l'on appelle l'axe du

[1] Voir pour la preuve de la transformation, 1er volume, p. 136.

solénoïde. Partageons cet arc de courbe en une infinité d'éléments $d\sigma$ *tous égaux entre eux.*

A chacun de ces éléments correspondra un courant élémentaire défini comme il suit :

1° L'intensité de ce courant sera i;

2° Ce courant parcourra un circuit infiniment petit dont le plan sera normal à l'élément $d\sigma$;

3° Ce circuit limitera une aire plane infiniment petite égale à $d\omega$;

4° Le centre de gravité de cette aire coïncidera avec le milieu de $d\sigma$;

5° Les valeurs de i et de $d\omega$ seront les mêmes pour tous les courants élémentaires.

L'ensemble de ces courants élémentaires constituera le solénoïde.

Nous sommes convenus plus haut de supposer provisoirement $i = 1$ pour abréger un peu les écritures.

Soient donc un solénoïde et un élément d'arc $d\sigma$ pris sur son axe et dont les cosinus directeurs sont l, m, n. Dans le plan normal à l'axe mené par l'élément $d\sigma$, circule un courant qui embrasse une aire infiniment petite $d\omega$. Le potentiel T dû à l'action de ce courant se calcule aisément. L'intégrale (10) se réduit en effet à un seul élément qui peut s'écrire :

$$d\omega \sum l \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) = \frac{d\omega}{d\sigma} \sum dx \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)$$

car :

$$dx = ld\sigma$$
$$dy = md\sigma$$
$$dz = nd\sigma$$

$d\omega$ et $d\sigma$ sont des constantes, quand on passe d'un élément du solénoïde à un autre. Pour avoir le potentiel dû au solénoïde total, il faut intégrer par rapport à dx, dy, dz le long de l'axe, et l'on a :

$$T=\frac{d\omega}{d\sigma}\int\left[dx\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+dy\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+dz\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right].$$

7. L'action d'un solénoïde fermé est nulle ; donc la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\Delta F-\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\right)=0.$$

Or, d'après l'équation (9)

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0;$$

par suite

$$\Delta F=0$$

Mais $\Delta F=-\int\Delta f(r)\,dx'$; il faut donc que $\Delta f(r)$ soit une constante, pour que l'intégrale précédente, prise le long d'un circuit fermé quelconque, soit nulle. En effet cette intégrale ne peut être nulle que si $\Delta f(r)$ est fonction de x' seulement. Mais $\Delta f(r)$ est une fonction de r seulement. Elle ne peut donc être

fonction de x' qu'en se réduisant à une constante. Écrivons donc :

$$\Delta f(r) = h.$$

On tire de là :

$$f(r) = \frac{hr^2}{6} + k + \frac{k'}{r}$$

La fonction $f(r)$ devant s'annuler à l'infini, h et k sont nécessairement nuls, et il vient :

$$f(r) = \frac{k'}{r}$$

L'expérience montre que $k' = 1$ en valeur absolue, il faut ici faire intervenir l'expérience.

Nous avons pu en effet, par une convention arbitraire, choisir l'unité de magnétisme, puis celle d'intensité de façon que le coefficient qui entre dans l'expression de l'action mutuelle de deux aimants soit égale à 1, de même que celui qui entre dans l'expression de l'action d'un courant sur un aimant. Il n'en est plus de même ici ; nous ne disposons plus du choix de l'unité que les conventions précédentes ont fixée définitivement ; c'est donc l'expérience seule qui peut nous faire savoir que le coefficient k' est bien égal à 1.

De plus, nous devons prendre le signe $+$, $f(r) = +\frac{1}{r}$; c'est encore l'expérience qui l'indique, les conventions de signe étant celles qui ont été faites plus haut. Jusqu'ici nous n'avions considéré que des expériences dans lesquelles on avait une action nulle ; une nouvelle expérience pouvait seule décider si, entre deux éléments parallèles et de même sens, s'exerçait une attraction ou une répulsion.

Ainsi

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} = \frac{U'^2}{r}$$

d'où :

$$U' = \pm \frac{i}{\sqrt{r}}$$

$$U' \frac{d^2U}{dsds'} = U' \frac{d}{ds}\left(U' \frac{dr}{ds'}\right) = U'U'' \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + U'^2 \frac{d^2r}{dsds'}$$

$$= + \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dsds'}$$

et la force attractive exercée entre deux éléments est :

$$2ii'dsds'U' \frac{d^2U}{dsds'} = \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2r}{dsds'}\right)$$

On peut encore mettre cette expression sous la forme :

$$(11) \qquad \frac{2ii'dsds'}{r^2}\left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right)$$

8. Relation entre la force électromagnétique et le potentiel vecteur. — On a vu dans le premier volume (n°s 111 à 113, p. 122 *sqq*), que l'action exercée par C', sur un pôle magnétique égal à 1 [1] est une force qui dérive d'un potentiel et dont les composantes sont :

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}$$

$$\beta = -\frac{d\Omega}{dy}$$

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

[1] On peut avoir un pôle magnétique isolé, en considérant un solénoïde magnétique de longueur infinie dont un seul pôle est à distance finie.

Ω est le potentiel magnétique dû à un feuillet limité au contour du circuit C′, et de puissance égale à l'intensité du courant. Soit $d\omega'$ un élément de l'aire limitée au contour C′, et l', m', n', les cosinus directeurs de la normale,

$$\Omega = \int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\omega'$$

$\frac{1}{r}$ est fonction de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ donc

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = - \frac{d\frac{1}{r}}{dx'}, \text{ etc.}$$

et

$$\Omega = - \int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\omega'$$

$$\alpha = + \int \left(l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + m' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy} + n' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} \right) d\omega'.$$

Transformons $F = \int f(r)\, dx' = \int \frac{1}{r}\, dx'$, en une intégrale étendue à l'aire $\int d\omega'$ limitée au contour C′.

$$F = \int d\omega' \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) = \int d\omega' \left(n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right)$$

De même

$$G = \int d\omega' \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - u' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right)$$

$$H = \int d\omega' \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - l' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right)$$

Calculons

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int d\omega' \left(m' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} \right)$$
$$+ \int d\omega' \left(n' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} \right)$$

Ajoutons :

$$o = \int d\omega' \left(l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdx} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} \right)$$

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha - \int d\omega . l' \Delta \frac{1}{r} = \alpha, \quad \text{car} \quad \Delta \frac{1}{r} = o.$$

On a d'une manière générale, entre la force et l'induction magnétique, les relations

$$(12) \qquad \begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases}$$

Dans un milieu non magnétique, $A = B = C = o$, et a, b, c, se confondent avec α, β γ.

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire :

$$(13)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz} \\ b = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx} \\ c = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy}, \end{cases}$$

9. Ces formules sont démontrées pour un milieu non magnétique ; on a toujours supposé, dans les calculs, que $\frac{1}{r}$ et ses dérivées restaient finies, ce qui suppose que le point où est placé le pôle-unité est extérieur aux masses attirantes ; il n'y avait ici de masses attirantes que le feuillet C′.

Nous verrons que les formules (13) sont encore vraies dans un milieu magnétique ; on n'a plus alors $\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, formule équivalente à la première des formules (13) dans un milieu non magnétique. Maxwell admet sans démonstration que ce sont les formules (13) qui conviennent dans le cas d'un milieu magnétique ; ou plutôt, il définit, à propos du magnétisme, les quantités F, G, H, par les équations (13), et les appelle les composantes du *potentiel vecteur de l'induction magnétique* [1] ; deux cents pages plus loin, il introduit les quantités F, G, H, en électromagnétisme, comme nous les avons introduites précédemment, et il dit : « Ces fonctions F, G, H, ne sont autre chose que les composantes du potentiel vecteur, qu'on a déjà rencontré. » Enfin, un peu plus loin, il dit : « *Nous*

[1] Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduction française, t. II, § 405, p. 32, § 589-592, p. 266-269, et § 616, p. 290.

avons démontré que les composantes de l'induction sont liées par les relations (13) aux composantes du potentiel vecteur. » Nous donnerons plus loin cette démonstration que Maxwell n'a pas donnée (§ 36 et § 37).

Le potentiel électrodynamique T peut se mettre sous la forme

$$T = \int (la + mb + nc)\, d\omega,$$

d'après les équations (13).

10. Potentiel électrodynamique d'un système voltaïque constitué par deux circuits. — Le potentiel mutuel de deux circuits peut recevoir une expression très simple

$$T = \int_{(c)} (F dx + G dy + H dz)$$

et

$$F = \int_{(c')} \frac{dx'}{r}$$

Donc

$$T = \int \int \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{r} = \int \int \frac{dsds' \cos \varepsilon}{r}$$

Si les intensités, qui étaient jusqu'ici prises égales à 1, étaient quelconques, on aurait :

$$(14) \qquad T = ii' \int \int \frac{dsds' \cos \varepsilon}{r} = ii'M$$

en posant :

$$M = \int\int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$$

M est le *coefficient d'induction mutuelle* des circuits C et C'

11. Soit $L = \int\int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$ le coefficient d'induction mutuelle du circuit C et d'un autre qui coïnciderait avec C. L est le coefficient de self-induction du circuit C.

Les divers éléments du circuit C exercent évidemment l'un sur l'autre une certaine action ; si le circuit se déforme, cette action produira un certain travail δT que je me propose d'évaluer. Nous avons vu plus haut quel est le travail dû à l'action d'un courant sur un *autre* courant. Quand on veut en déduire l'expression du travail dû à l'action d'un courant *sur lui-même*, on rencontre une petite difficulté que nous tournerons par l'artifice suivant :

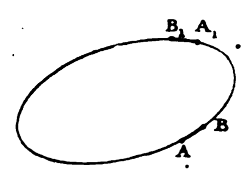


Fig. 3.

Supposons deux courants différents C et C' d'intensités i et i' parcourant un même circuit C. Nous pouvons appliquer à ces deux courants *différents* la formule (14) et, si nous appelons δT_1 le travail dû à leur action mutuelle, nous pouvons écrire :

$$\delta T_1 = \delta L i i'$$

Il nous reste à comparer δT à δT_1.

Soient $d\sigma$ un élément du courant C d'intensité i; $d\sigma'$, l'élé-

ment du courant C′ d'intensité i' qui coïncide avec $d\sigma$; soient $d\sigma_1$ un autre élément de C, et $d\sigma'_1$, celui des éléments de C′ qui coïncide avec $d\sigma'$.

Si μ est le travail de l'action de $d\sigma$ sur $d\sigma'_1$
μ' de $d\sigma'$ sur $d\sigma_1$
λ de $d\sigma$ sur $d\sigma_1$

et si δT_1 est le travail élémentaire total de l'action du courant C sur le courant C′ et δT le travail de l'action de C sur lui-même, on a :

$$\delta T_1 = \delta\,(Lii') = \int(\mu + \mu')$$

$$\delta T = \int\lambda$$

Or :

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{i'}{i} \text{ et } \frac{\mu'}{\lambda} = \frac{i'}{i}$$

$$\mu = \mu' = \frac{i'}{i}\lambda$$

$$\delta T_1 = \int 2\frac{i'}{i}\lambda = 2\frac{i'}{i}\delta T$$

$$\delta T = \frac{1}{2}\delta\,(Li^2).$$

Le potentiel électrodynamique total du système voltaïque formé par deux circuits C et C′, par rapport à lui-même, a donc pour expression :

$$T = \frac{Li^2}{2} + Mii' + \frac{Ni'^2}{2} \tag{15}$$

N étant le coefficient de self-induction de C′.

Le travail dû aux actions électrodynamiques est :

$$\frac{i^2\delta L + 2ii'\delta M + i'^2\delta N}{2}.$$

Il se compose en effet :

1° Du travail de l'action de C sur lui-même, égal à :

$$\frac{i^2}{2}\delta L.$$

2° Du travail de l'action de C sur C', égal à :

$$ii'\delta M.$$

3 Du travail de l'action de C' sur lui-même, égal à·

$$\frac{i'^2}{2}\delta N.$$

CHAPITRE II

THÉORIE DE L'INDUCTION

12. L'opinion reçue est qu'une fois connues les lois de l'électrodynamique, l'application du principe de la conservation de l'énergie suffit à trouver les lois de l'induction. M. Bertrand a cherché à réfuter cette opinion [1]. Je vais discuter ses objections en détail, mais on verra que la plus grande partie du champ de bataille restera à M. Bertrand.

On a deux courants en présence. Chacun est alimenté par une pile ; les conducteurs s'échauffent. S'ils sont mobiles et se rapprochent, il se produit un travail mécanique, ce travail a dû être emprunté à quelque chose : il faut donc admettre qu'un phénomène ignoré jusqu'ici introduit dans les équations un terme nouveau. La loi $dQ = Ri^2dt$ est-elle encore applicable ? Pourquoi, dit M. Bertrand, de même que la vapeur qui travaille refroidit le vase qui la contient, l'électricité n'aurait-elle pas un effet analogue ? On pourrait concevoir

[1] *Théorie mathématique de l'électricité*, chap. XI, p. 208

que les conducteurs s'échauffent moins quand le courant travaille et ne serait-ce pas aussi vraisemblable que de supposer que les intensités varient?

On peut répondre: non, cette hypothèse ne serait pas *a priori aussi vraisemblable* que celle qui est confirmée par l'expérience. Supposons que la loi de Joule ne s'applique plus; les conducteurs s'échauffent moins; on a $dQ = Ri^2dt - Hdt$, H étant une quantité positive dépendant de la vitesse des conducteurs. On pourra rendre H très grand, en donnant à la vitesse une valeur très grande, et il pourra arriver que dQ soit négatif. On emprunterait donc de la chaleur au circuit qui se refroidirait et l'on pourrait la transformer en travail mécanique susceptible d'être transformé à son tour, par frottement, en chaleur à température aussi élevée qu'on voudrait; ce serait contraire au principe de Clausius.

Une autre conjecture est possible : la loi de Joule s'appliquerait, mais la pile consommerait davantage pour donner le même courant. En d'autres termes la loi de Faraday ne s'appliquerait pas aux courants qui produisent un travail mécanique. — Cette hypothèse est fort invraisemblable; si j'ai une pile à Paris et que je la relie par des fils à une machine située à Creil, il serait étrange que, l'intensité restant toujours la même, la loi de Faraday cessât de s'appliquer à Paris quand le courant travaille à Creil.

Malgré l'invraisemblance de ces deux hypothèses, on a peut-être eu tort d'en regarder la fausseté comme évidente, mais j'appellerai plus particulièrement l'attention sur deux autres objections de M. Bertrand qui me semblent beaucoup plus graves. Il ne s'agit plus en effet d'hypothèses que l'expérience démontre fausses et qu'on n'aurait pas dû pourtant rejeter

a priori, mais de circonstances *réelles* dont on a souvent oublié de tenir compte en s'exposant ainsi à des erreurs.

En premier lieu, lorsque deux courants s'attirent, ils deviennent solidaires, et l'on n'a pas le droit, quoi qu'on le fasse constamment, d'appliquer le principe de la conservation de l'énergie à l'un d'entre eux seulement : il faut considérer le système des deux courants.

Ce n'est pas tout : l'éther a une force vive variable dont il faut tenir compte dans les calculs, comme de la force vive de l'air que met en mouvement un moulin à vent. Ici il y a deux manières de présenter l'objection : on peut supposer qu'un courant permanent rayonne de la force vive comme une lampe constante rayonne de la lumière ; on peut supposer au contraire que la force vive de l'éther reste constante dès que l'état de régime est atteint et qu'il n'y en a point d'empruntée au courant : c'est seulement pendant la période variable que la force vive de l'éther varie ; quand le courant croît, l'éther absorbe de la force vive qu'il restitue au moment où le courant décroît.

La première hypothèse, celle du rayonnement indéfini, est contredite par l'expérience, puisque avec un courant permanent la chaleur produite dans les conducteurs est l'équivalent de l'énergie voltaïque de la pile. Il est vrai de dire que l'expérience seule nous l'a appris.

Quant à la seconde hypothèse, non seulement elle n'est pas à rejeter, mais il y a certainement à tenir compte de la force vive communiquée à l'éther, sous peine de ne pas tenir compte des faits. En la négligeant on s'expose à l'erreur.

On pourrait varier les objections à l'infini, et l'on serait conduit à des conjectures plus ou moins invraisemblables

qu'il faudrait rejeter l'une après l'autre. C'est en quoi M. Bertrand a raison de dire que l'expérience seule pouvait montrer que les lois de Joule, de Faraday et de Ohm sont encore applicables aux courants qui travaillent.

13. Nous allons prendre comme point de départ ce fait expérimental ; et, de plus, nous admettrons que l'éther a une énergie électrocinétique constante quand le courant est constant, mais variable avec l'intensité du courant. Mais nous devons emprunter plus encore à l'expérience.

Soient deux circuits fermés C et C′, parcourus par des courants i et i', l'expérience montre que quand i' varie, il en résulte dans C une force électromotrice $A\frac{di'}{dt}$, A étant un *coefficient d'induction* de C′ sur C, coefficient indépendant des intensités. Si C′ se déplace et est parcouru par un courant constant i', si au bout du temps dt C′, prend une position infiniment voisine C″, le déplacement du circuit de C′ en C″ pendant le temps dt produit une force électromotrice $i'\frac{dB}{dt}$, $\frac{dB}{dt}$ étant aussi un coefficient ne dépendant que des conditions géométriques des deux circuits.

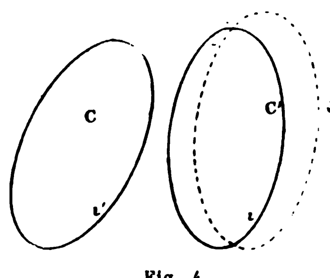


Fig. 4.

Ici se présente une hypothèse toute naturelle, il est vrai, mais qui a besoin d'être confirmée par l'expérience; soient A le coefficient d'induction de C′ sur C; $A + dA$, celui de C″ sur C.

Supposons qu'à l'époque t, nous ayons en C′ un courant di' et en C″ un courant 0. Le courant di' se déplace en conser-

vant son intensité et vient en C″ au temps $t + dt$: on a alors un courant O en C′, et un courant di' en C″.

On peut imaginer qu'on est passé du même état initial au même état final par une autre modification en faisant varier les intensités : l'intensité en C′ primitivement égale à di' a décru jusqu'à s'annuler et pendant ce temps l'intensité en C″ primitivement nulle est devenue di'. Les circuits C′ et C″ sont d'ailleurs demeurés fixes. Il est *naturel* de supposer que l'effet produit sur C est le même dans les deux cas.

Dans le premier cas, la force électromotrice née en A est $ai' \frac{dB}{dt}$; dans le second, elle est la différence entre $- A \frac{di'}{dt}$, et $(A + dA) \frac{di'}{dt}$, c'est-à-dire $\frac{dA.di'}{dt}$; donc :

$$dA = dB.$$

Si le courant se déplace et varie en même temps, les deux forces électromotrices ont pour somme :

$$A \frac{di'}{dt} + i' \frac{dA}{dt} = \frac{d(Ai')}{dt}.$$

Nous admettrons cette équation, conséquence de l'égalité $dA = dB$, comme un fait expérimental.

14. L'application du principe de la conservation de l'énergie va nous permettre de déterminer les coefficients d'induction définis comme précédemment.

Soient A le coefficient d'induction de C par rapport à lui-même

B	C	C′
B′	C′	C
D	C′	lui-même

La loi de Ohm, appliquée aux deux circuits, donne :

$$(1)\quad \begin{cases} Ri = E - \dfrac{d(Ai)}{dt} - \dfrac{d(Bi')}{dt} \\ R'i' = E' - \dfrac{d(B'i)}{dt} - \dfrac{d(Di')}{dt}. \end{cases}$$

Écrivons que l'énergie se conserve. L'énergie voltaïque dépensée dans le temps dt est

$$(Ei + E'i')\, dt.$$

Elle se retrouve sous trois formes :

1° Chaleur de Joule ;

2° Travail électrodynamique ;

3° Accroissement d'énergie électrocinétique de l'éther.

Si cette énergie de l'éther est représentée par U, l'équation s'écrit :

$$(2)\quad (Ei + E'i')\, dt = Ri^2 dt + R'i'^2 dt + \frac{1}{2}(i^2 dL + 2ii' dM + i'^2 dN) + dU$$

Je ne connais rien sur la fonction U ; j'écris seulement que dU est une différentielle exacte. Remplaçons dans l'expression de dU, $E - Ri$ par sa valeur tirée de (1) :

$$(3)\quad dU = id(Ai) + id(Bi') + i'd(B'i) + i'd(Di') - \frac{1}{2}(i^2 dL + 2ii' dM + i'^2 dN)$$

Supposons que les intensités varient seules. Le dernier terme disparaît et dU se réduit à :

$$dU = Aidi + Bidi' + B'i'di + Di'di' ;$$

dU étant différentielle exacte, il faut que

$$\frac{d}{di'}(Ai + B'i') = \frac{d}{di}(Bi + Di')$$

d'où :

$$B = B'.$$

Intégrant :

$$U = \frac{Ai^2}{2} + Bii' + \frac{Di'^2}{2} + \text{const.}$$

la constante ne dépendant pas des intensités. Comme U est nul quand il n'y a pas de courant, que $i = i' = o$, la constante est nulle.

D'après cela, quand les intensités sont constantes et que les conducteurs se déplacent, dU se réduit à :

$$dU = \frac{1}{2}(i^2 dA + 2ii'dB + i'^2 dD),$$

expression qui doit être identique à la valeur du second membre de (3), quand on fait $di = di' = o$, c'est-à-dire à :

$$i^2 dA + 2ii'dB + i'^2 dD - \frac{1}{2}(i^2 dL + 2ii'dM + i'^2 dN).$$

Identifions :

$$\frac{1}{2}dA = dA - \frac{1}{2}dL$$

$$dA = dL,$$

d'où

$$A = L$$

car A et L s'annr'—' — 'eurs sont à une dis-

tance infinie. De même

$$D = N$$

$$B = M$$

et

$$T = U.$$

Le potentiel électrodynamique représente l'énergie électrocinétique de l'éther.

On peut écrire, d'après cela, la loi de Ohm :

$$E - Ri = \frac{d(Li + Mi')}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT}{di}$$

$$E' - R'i' = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT}{di'}$$

Cette forme rappelle celle des équations de Lagrange.

Maxwell a montré, et c'est là une des parties les plus originales de son œuvre, que les lois des actions électrodynamiques et de l'induction peuvent être mises sous la forme des équations de Lagrange; les forces électromotrices d'induction seraient ainsi des forces d'inertie [1].

[1] Voir le premier volume, § 151, p. 168 et suivre.

CHAPITRE III

THÉORIE DE WEBER [1]

15. Explication des attractions électrodynamiques. — Weber a voulu rendre compte des attractions électrodynamiques, en considérant les courants comme produits par des masses électriques se déplaçant dans les conducteurs, et supposant qu'entre deux masses électriques s'exerce une action qui dépend de leur mouvement et qui se réduit à l'action déterminée par la loi de Coulomb quand elles sont au repos.

Soient deux masses e et e' au repos : la force répulsive qui s'exerce entre elles est égale à $+\frac{ee'}{r^2}$ en unités électrostatiques. Weber admet que si elles sont en mouvement, la répulsion devient :

$$\frac{ee'}{r^2} + ee'\left[A\frac{d^2r}{dt^2} + B\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \tag{1}$$

A et B étant fonctions de r seul.

(1) *Electrodynamische Maassbestimmungen*, p. 305.

Il s'agit de déterminer A et B de manière à retrouver la formule d'Ampère, en vertu de laquelle la *répulsion* entre deux éléments de courant est, en unités électromagnétiques :

$$(2) \qquad + \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)$$

Les quantités d'électricité e et e' sont supposées parcourir les deux circuits avec des vitesses constantes v et v'. La distance r est fonction de s et de s' et on a :

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad v' = \frac{ds'}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}v + \frac{dr}{ds'}v'$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2}v^2 + 2\frac{d^2r}{dsds'}vv' + \frac{d^2r}{ds'^2}v'^2$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 v^2 + 2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}vv' + \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 v'^2$$

La répulsion électrodynamique [le second terme de l'expression (1)] devient ainsi :

$$\lambda ee'v^2 + 2\mu ee'vv' + \nu ee'v'^2$$

en posant, pour abréger :

$$\lambda = A\frac{d^2r}{ds^2} + B\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

$$\mu = A\frac{d^2r}{dsds'} + B\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

$$\nu = A\frac{d^2r}{ds'^2} + B\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2$$

Supposons que ds contienne e d'électricité positive, e_1 d'é-

lectricité négative (e_1 est un nombre essentiellement négatif; quand le corps est à l'état neutre $e + e_1 = 0$). La vitesse de e est v, de e_1 est v_1. Dans ds' on a de même une quantité e' d'électricité positive et une quantité e'_1 d'électricité négative animées respectivement de vitesses v' et v'_1.

La répulsion totale de ds sur ds' s'obtient en composant les répulsions des quantités e et e_1 d'électricité contenues dans ds sur les quantités e' et e'_1 contenues dans ds'.

Il vient donc :

$$R = \lambda \sum ee'v^2 + 2\mu \sum ee'vv' + \nu \sum ee'v'^2$$

en posant :

$$\sum ee'v^2 = ee'v^2 + ee'_1v^2 + e_1e'v_1^2 + e_1e'_1v_1^2$$
$$= (ev^2 + e_1v_1^2)(e' + e'_1)$$

De même

$$\sum ee'vv' = (ev + e_1v_1)(e'v' + e'_1v'_1)$$

$$\sum ee'v'^2 = (e + e')(e'v'^2 + e'_1v'^2_1)$$

Le débit électrique du premier circuit est :

$$\frac{e}{\frac{ds}{v}} = \frac{ev}{ds}$$

pour l'électricité positive ;

Il est égal à $\frac{e_1v_1}{ds}$ pour l'électricité négative. Le débit total est donc $\frac{ev + e_1v_1}{ds}$;

D'autre part l'intensité i est par définition le débit total exprimé en unités électromagnétiques. Le débit total exprimé en unités électrostatiques est donc ci, c étant le rapport des unités, de sorte qu'on a :

$$\frac{ev + e_1 v_1}{ds} = ci$$

Donc :

$$\sum ee'vv' = c^2 ii' ds ds'$$

La répulsion électrodynamique est nulle entre un conducteur chargé d'électricité, mais où ne passe pas de courant, et un autre parcouru par un courant sans être chargé.

R doit donc être nul si le conducteur C n'est pas chargé mais est parcouru par un courant, c'est-à-dire si $e + e_1 = 0$, et si le conducteur C' est chargé mais n'est parcouru par aucun courant, c'est-à-dire si $v' = v'_1 = 0$;

Mais si $v' = v'_1 = 0$ les deux derniers termes de R s'annulent ; le premier terme doit donc s'annuler également ; donc on a :

$$\lambda (e' + e'_1)(ev_1^2 + e_1 v_1^2) = 0$$

λ n'est pas nul en général ; $e' + e'_1 \gtrless 0$ si le conducteur C' est chargé ainsi que nous l'avons supposé.

Donc on a :

$$ev^2 + e_1 v_1^2 = 0$$

et de même :

$$e'v'^2 + e'_1 v_1'^2 = 0$$

Voilà des conditions bien étranges et bien artificielles. En

outre elles obligent d'admettre l'existence réelle des deux fluides. Il y a plus : Rowland a réalisé des actions électrodynamiques avec un disque chargé d'électricité et animé d'un mouvement rapide ; alors

$$v = v_1 \quad \text{d'où } ev^2 + e_1 v_1^2 = (e + e_1)\, v^2$$

et ni v ni $e + e_1$ n'est nul. Il est vrai qu'en faisant le calcul on reconnaît que ce facteur est absolument négligeable dans les expériences de Rowland.

16. On peut présenter la théorie de Weber sous un jour plus favorable. Rien n'est plus loin de ma pensée que de la défendre: mais je veux montrer seulement en quoi on pourrait la rendre moins étrange. On peut supposer e et e_1 séparément très grands, très supérieurs en valeur absolue à leur somme algébrique $e+e_1$; e et e_1 seraient de l'ordre de grandeur d'une quantité très grande N, $e + e_1$ de l'ordre de grandeur de l'unité et au contraire v et v_1 de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Ceci pourra paraître assez naturel d'après la vitesse que certains physiciens attribuent à l'électricité dans les électrolytes, vitesse qui à les en croire ne dépasserait pas quelques millimètres par seconde; je ne veux discuter ici en aucune façon leurs conclusions. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que v et v_1 soient si petits pour pouvoir être regardés comme très petits. Il suffit en effet que v soit petit par rapport à c, qui est égal à la vitesse de la lumière.

$ev + e_1 v_1$ sera de l'ordre de grandeur de 1 ; $ev^2 + e_1 v_1^2$, de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Le produit $(ev^2 + e_1 v_1^2)\,(e' + e_1')$ sera dès lors très petit, de l'ordre de $\frac{1}{N}$; et deux des termes de R, les

termes en λ et en ν sont complètement négligeables en présence du terme en μ. On n'a plus alors les mêmes difficultés, et l'on rend compte des expériences de Rowland.

17. On trouve en somme, en ne tenant compte que du terme en μ et remplaçant

$$\sum ee'vv'$$

par sa valeur :

$$R = 2c^2 ii' ds ds' \left(A \frac{d^2r}{ds ds'} + B \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right);$$

identifiant avec (2), on a :

$$A = \frac{1}{c^2 r} \qquad B = \frac{-1}{2c^2r^2};$$

et l'expression de la répulsion électrodynamique entre deux masses en mouvement est :

$$\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

18. Une question se pose : l'hypothèse de Weber est-elle conforme au principe de la conservation de l'énergie ?

Le travail de la répulsion électrodynamique est :

$$\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{dr}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{2r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

et doit être égal à $-d\psi$ s'il existe un potentiel et qu'on appelle ψ ce potentiel. Mais on a :

$$\frac{dr}{r}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\cdot d.\frac{dr}{dt}$$

d'où :

$$d\psi = -\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\cdot d\cdot\frac{dr}{dt} - \frac{dr}{r^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{ee'}{c^2}\, d\left[\frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

Le potentiel *total* (obtenu en tenant compte à la fois de la répulsion électrostatique et de la répulsion électrodynamique) de deux masses e et e' est :

$$\psi = \frac{ee'}{r}\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

Cherchons, d'après cela, le potentiel mutuel de deux éléments de courant (en nous bornant ici au potentiel électrodynamique) ; c'est :

$$-\frac{1}{2c^2r}\sum ee'\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$= -\frac{1}{2c^2r}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\sum ee'v^2 + 2\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\sum ee'vv' + \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2\sum ee'v'^2\right]$$

Le premier et le dernier terme disparaissant, il reste le terme du milieu qui est $2c^2ii'dsds'\,\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}$; donc le potentiel est :

$$-\,ii'dsds'\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}.$$

19. Nous avons là une différence avec la théorie d'Ampère. d'après laquelle l'action réciproque de deux circuits fermés admet bien un potentiel, mais non l'action réciproque de deux éléments, ni même l'action réciproque d'un courant fermé et d'une portion de courant. Je dis que dans la théorie d'Ampère

un élément de courant n'a pas de potentiel par rapport à un courant fermé ; en effet, soit un élément AB qui se déplace sous l'action d'un courant fermé et vient en A'B' ; je puis choisir AA', tel que le travail effectué dans ce déplacement ne soit pas nul. Je pourrai toujours ramener l'élément en AB sans travail, si la loi d'Ampère est vraie ; en effet, je fais tourner A'B' autour de A', jusqu'à ce que sa direction coïncide avec AA'. Le travail effectué dans cette relation est un infiniment petit d'ordre supérieur. Je fais ensuite mouvoir l'élément dans sa propre direction : il vient en AB''' : aucun travail, puisque l'action d'un courant fermé est normale à l'élément ; une rotation autour de A le ramène ensuite en AB, et en n'effectuant encore qu'un travail infiniment petit d'ordre supérieur. Il n'existe donc pas de potentiel, puisqu'on a pu ramener l'élément à sa position initiale sans que le travail total effectué soit nul ; ce travail total se réduit à celui qui a été effectué pour amener AB en A'B'.

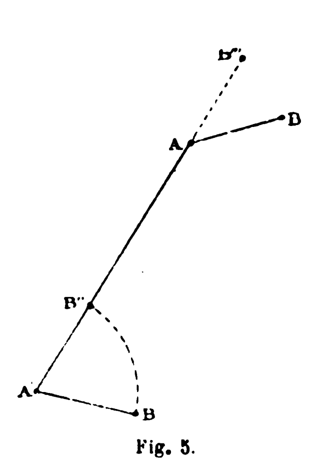


Fig. 5.

La contradiction avec la théorie de Weber n'est qu'apparente. On a supposé, dans cette théorie, les molécules électriques animées d'un mouvement uniforme : cela n'est possible que pour un courant fermé, non pour un courant ouvert. A l'extrémité d'un courant ouvert en effet les molécules électriques *s'arrêtent;* leur accélération n'est donc pas nulle. Les éléments voisins des extrémités n'obéiraient pas à la loi d'Ampère, parce qu'il y aurait à tenir compte de l'accélération des

molécules électriques qui y circulent, accélération qui n'est plus nulle. Il y aurait donc divergence entre les deux théories si on avait à faire, par exemple, à un courant fermé et à une portion de courant entièrement libre.

Mais ce n'est pas le cas où l'on se place d'ordinaire quand on examine expérimentalement l'action d'un courant fermé sur un élément de courant.

En effet, quand on étudie l'action d'un conducteur fermé sur un élément mobile AMB, cet élément mobile AMB fait partie lui-même d'un courant fermé et ses extrémités A et B sont mobiles le long de conducteurs fixes. Il n'y a pas alors d'accélération pour la molécule qui arrive en A ou en A'; et, dans ce cas, la théorie de Weber nous conduit à la loi d'Ampère. On trouve alors, en effet, que les forces qu'indiquent les deux lois admettent toutes deux un potentiel, et le même potentiel; seulement dans la théorie d'Ampère, il n'y a un potentiel qu'en vertu des liaisons particulières imposées au système. Si, au contraire, on considérait des courants instantanés, ouverts, la loi d'Ampère et l'hypothèse de Weber conduiraient à des résultats différents; mais dans ce cas l'expérience ne semble guère possible.

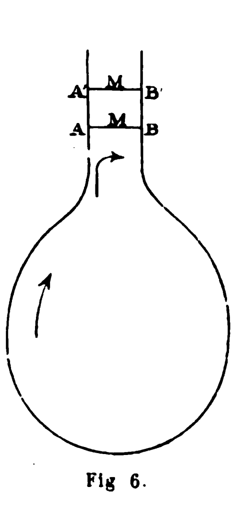


Fig 6.

20. L'induction dans la théorie de Weber. — La loi de Weber satisfait au principe de la conservation de l'énergie. Donc, d'après Maxwell, les lois de l'induction

doivent s'en déduire. Dans l'espèce, ce raisonnement ne vaut rien : on ne trouverait les lois ordinaires de l'induction en partant de l'hypothèse de Weber, qu'en supposant qu'on n'a que des courants fermés, et nullement si on suppose qu'on a des circuits ouverts. Maxwell a commis dans son calcul (¹) des erreurs graves, mais il en a commis deux qui se compensent.

Cherchons l'induction de C sur C'. Les deux circuits sont mobiles, la distance r de deux éléments ds et ds' est ici fonction non seulement de s et de s', mais du temps t

$$\frac{ds}{dt} = v \qquad v \text{ fonction de } s \text{ et } t$$

$$\frac{ds'}{dt} = v' \qquad v' \text{ fonction de } s' \text{ et } t'$$

L'action électrodynamique est :

$$\frac{ee'}{c^2r^2}\left[r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]$$

(je représente par des ∂ les dérivées totales, et par des d les dérivées partielles).

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{ds}v + \frac{dr}{ds'}v' + \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{d^2r}{dt^2}v^2 + 2\frac{d^2r}{dsds'}vv' + \frac{d^2r}{ds'^2}v'^2 + \underline{2\frac{d^2r}{dsdt}v + 2\frac{d^2r}{ds'dt}v'} + \frac{d^2r}{dt^2}$$
$$+ \frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt} + \frac{dr}{ds'}\frac{dv'}{dt} + \frac{dr}{ds}\frac{dv}{ds}v + \frac{dr}{ds'}\frac{dv'}{ds'}v'$$

Maxwell oublie les deux termes soulignés.

Dans ds nous avons e d'électricité positive, animée de la

(¹) MAXWELL, *Électr. et Magn.*, trad. franç., t. II, § 856-860, p. 554-558, voir *Comptes Rendus*, t. CX, p. 825 (21 avril 1890).

vitesse v ; et e_1 de négative, animée de la vitesse v_1 ; dans ds', on a des quantités d'électricité e' et e'_1, animées de vitesses v' et v'_1.

Si R_1 est la répulsion de e sur e'
R_2 de e_1 sur e'
R_3 de e sur e'_1
R_4 de e_1 sur e'_1

la répulsion totale, précédemment trouvée, est

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

La force électromotrice d'induction est évidemment proportionnelle à la force qui tend à séparer l'électricité positive de l'électricité négative dans l'élément ds' ; ce sera $R_1 + R_2 - R_3 - R_4$; et il faudra multiplier par $\cos\theta' = \frac{dr}{ds'}$, pour avoir la composante de la force dans la direction du fil. La force électromotrice cherchée est donc égale à

$$k \cos\theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

k étant un coefficient constant qui dépend de l'unité à laquelle sont rapportées les forces électromotrices.

Pour déterminer ce coefficient k examinons un cas particulier, par exemple celui où les masses électriques sont au repos et où les forces électromotrices se réduisent par conséquent aux forces électrostatiques.

Dans ce cas, si l'on pose pour abréger

$$H = \cos\theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

il vient :

$$H = \frac{e + e_1}{r^2}(e' - e'_1)\frac{dr}{ds'} = -c\,(e' - e'_1)\frac{d\varphi}{ds'}$$

en représentant par φ le potentiel électrostatique

$$\varphi = \frac{1}{c}\frac{e + e_1}{r}$$

La force électromotrice électrostatique est d'ailleurs

$$E = -\frac{d\varphi}{ds'}ds' = \frac{H ds'}{e' - e'_1} \cdot \frac{1}{c}$$

et comme par définition $E = kH$, il vient :

$$k = c\,\frac{ds'}{(e' - e'_1)}$$

Nous pourrons donc en général déduire la force électromotrice E de la connaissance de

$$H = \cos\theta'\,(R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

21. En se reportant aux expressions de $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ on reconnaîtra que H contient des termes en v^2, v'^2, vv', v, v', et tous connus; et des termes en $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt'}$, $v\,\frac{dv}{ds}$ et $v'\,\frac{ds}{ds'}$.

Si on laisse de côté un coefficient dépendant seulement de la position et du mouvement relatifs des deux éléments ds et ds' mais qui est indépendant de e, e_1, v et v_1 et

de e', e'_1, v' et v'_1 :

les termes en v^2 seront	$(ev^2 + e_1 v_1^2)(e' - e'_1)$
en vv'	$(ev + e_1 v_1)(e'v' - e'_1 v'_1)$
en v'^2	$(e + e_1)(e'v'^2 - e'_1 v'^2_1)$
en v	$(ev + e_1 v_1)(e' - e'_1)$
en v'	$(e + e_1)(e'v' - e'_1 v'_1)$
connus :	$(e + e_1)(e' - e'_1)$

on aurait de même ce que donnent les termes en $\frac{dv}{dt}$, $v\frac{dv}{ds}$, etc.

Dans les courants voltaïques ordinaires, on a :

$$e = -e_1 \quad e' = -e'_1 \quad v = -v_1 \quad v' = -v'_1$$

Tous les termes disparaissent, sauf le terme en v et le terme en $\frac{dv}{dt}$; les autres disparaissent, le terme en $v\frac{dv}{ds}$ disparaît pour la même raison que le terme en v^2. Les seuls termes qui importent dans l'expression de $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ sont donc le terme $\frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}$ et le terme $2\frac{d^2 r}{dsdt}v$, qui est un de ceux que Maxwell a oubliés.

Dans $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ on aura à conserver $2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}v$.

$$\frac{\mathrm{H}}{e' - e'_1} = \frac{1}{c^2 r^2}\left[-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}(ev + e_1 v_1) + r\frac{dr}{ds}\left(e\frac{dv}{dt} + e_1\frac{dv_1}{dt}\right) + 2r\frac{d^2 r}{dsdt}(ev + e_1 v_1)\right]\frac{dr}{ds'}.$$

Or

$$ev + e_1 v_1 = cids$$

$$e\frac{dv}{dt} + e_1\frac{dv_1}{dt} = c\frac{di}{dt}ds$$

Donc

$$E = kH = \frac{dsds'}{c^2r^2}\left[-i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt} + r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt} + 2ir\frac{d^2r}{dsdt}\right]\frac{dr}{ds'}$$

$$= dsds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right) + \underline{\frac{2idsds'}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}}$$

Maxwell néglige le second terme et écrit le premier:

$$dsds'\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{i}{r}\right),$$

ce qui n'est pas exact. Car

$$dsds'\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{i}{r}\right]$$

$$= dsds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{i}\right)$$

$$+\frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt} + \frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}\right]$$

En dernière analyse la somme algébrique des termes négligés s'écrit

$$-\frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt} - \frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}\right]$$

En intégrant par rapport à s et s', on a pour la force électromotrice totale, d'après Maxwell

$$E = \frac{d}{dt}\int\int\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\frac{i}{r}dsds' = -\frac{d(Mi)}{dt},$$

ce qui n'est vrai que si l'intégrale des termes négligés

$$\int\int\frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt} - \frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt}\right]$$

est nulle. Or cette intégrale n'est nulle que si les deux circuits auxquels on étend l'intégration sont fermés.

Considérons :

$$\int \frac{ds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = \left[\log r . \frac{d^2r}{dsdt}\right] - \int \log r \frac{d^3r}{dsds'dt} ds';$$

le premier terme est nul, la valeur étant la même aux deux limites. Intégrons par rapport à s, il vient :

$$\int\int \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = -\int\int \log r \frac{d^3r}{dsds'dt} dsds'$$

c'est-à-dire que le premier membre est égal à une expression qui ne change pas quand on y permute s et s'. Par suite

$$\int\int \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = \int\int \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{ds'dt} \cdot \frac{dr}{ds}$$

Mais *ceci n'est vrai que pour deux courants fermés.*

CHAPITRE IV

THÉORIE DE HELMHOLTZ

22. L'expérience nous fait connaître l'action mutuelle de deux courants fermés ; pour en déduire l'action de deux éléments de courants, Ampère a été obligé de faire une hypothèse ; il suppose que cette action se réduit à une force dirigée suivant la droite qui joint ces deux éléments. Cette hypothèse n'est pas la seule qu'on puisse faire. Nous avons vu plus haut comment Weber, guidé par une théorie qui concorde avec celle d'Ampère dans le cas des courants fermés, a été conduit à admettre que deux éléments ont un potentiel mutuel qui a pour expression :

$$-ii'\frac{dsds'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

D'un autre côté F. Neumann admet pour le potentiel mutuel de deux éléments l'expression :

$$ii'dsds'\frac{\cos\varepsilon}{r}.$$

Helmholtz cherche une formule générale comprenant celles de Weber et de Neumann et il fait à cet effet les hypothèses suivantes :

1° Il existe un potentiel mutuel de deux éléments de courants ;

2° Ce potentiel est inversement proportionnel à r.

Comme en vertu du principe des courants sinueux, ce potentiel doit être linéaire en $\cos \varepsilon$ et $\cos \theta \cos \theta'$ (Cf. § 1, page 6) Helmholtz est conduit à lui donner pour expression :

$$ii'dsds' \left(A \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} \right)$$

où A et B sont des coefficients constants. Cette expression peut s'écrire, en vertu des formules (4) et (5), chapitre Ier,

$$ii'dsds' \left[(A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{d^2 r}{dsds'} \right]$$

Si l'on a deux courants fermés leur potentiel électrodynamique mutuel sera l'intégrale double

$$T = \int \int ii'dsds' \left[(A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{d^2 r}{dsds'} \right]$$

Le second terme est nul, car

$$\int ds \frac{d^2 r}{dsds'} = 0$$

si l'intégrale est prise le long d'un circuit fermé, et T se réduit à :

$$(A + B) \int \int ii'dsds' \frac{\cos \varepsilon}{r}$$

L'expérience montre que l'on doit prendre $(A+B) = 1$ (§ **10**), mais tant que l'expérience porte sur des courants fermés, elle est impuissante à déterminer le coefficient B du terme $\frac{d^2r}{dsds'}$. C'est pourquoi dans diverses hypothèses, on a pu attribuer à B des valeurs différentes.

En posant, avec Helmholtz, $B = \frac{1-k}{2}$, l'expression du potentiel élémentaire devient :

$$ii'dsds'\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d^2r}{dsds'}\right)$$

La formule de Weber est un cas particulier de celle de Helmholtz ; on la retrouve en donnant à k la valeur -1 ; alors le potentiel a la forme :

$$ii'dsds'\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{d^2r}{dsds'}\right) = -\frac{ii'dsds'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

En faisant $k = 1$, on a l'expression du potentiel qu'avait proposée Franz Neumann. En faisant $k = 0$, dit Helmholtz, on retrouverait l'électrodynamique de Maxwell. Cette assertion de Helmholtz a été parfois mal comprise ; nous y reviendrons (§ 45).

23. La formule d'Ampère peut-elle être considérée comme un cas particulier de celle de Helmholtz ? En aucune façon. Nous avons vu, en effet, que dans la théorie d'Ampère l'action mutuelle de deux éléments n'a pas de potentiel. La formule d'Ampère est la seule qui explique les faits par une action entre deux éléments, réduite à une force dirigée suivant la droite qui les joint. Dès qu'on admet que cette action dérive d'un potentiel, comme le potentiel dépend de l'orientation

des éléments, ses dérivées par rapport aux angles qui définissent cette orientation ne sont pas identiquement nulles, et il en est de même du travail virtuel qu'entraîne une variation infinitésimale de ces angles; c'est dire, que, outre la force dirigée suivant la droite de jonction, existent des couples qui tendent à faire tourner les éléments et dont les moments sont de l'ordre de grandeur de la force. M. Bertrand a fait à ce sujet des objections à la théorie de Helmholtz (*Comptes rendus*, t. 73, p. 965; t. 75, p. 860; t. 77, p. 1049); selon lui, tous ces couples, agissant sur tous les éléments d'un fil conducteur parcouru par un courant et soumis à l'action d'un autre courant ou de la terre, devraient immédiatement briser le fil et le réduire en poussière. Helmholtz répondait qu'une aiguille aimantée ne se brisait pas sous l'action de la terre, quoique sur chaque élément de longueur agît un couple dont le moment est de l'ordre de grandeur de l'élément. M. Bertrand a répliqué que personne ne croyait plus aujourd'hui à l'existence réelle des fluides magnétiques de Coulomb et que la réponse de Helmholtz n'avait pas de sens; il semble que Helmholtz aurait pu dire qu'on ne croyait pas davantage à l'existence objective d'un courant matériel circulant dans un conducteur.

Je ne veux pas m'immiscer dans cette polémique; je veux toutefois montrer en quoi consiste le malentendu qui sépare ces deux savants éminents.

Pour M. Bertrand, le courant se compose d'éléments extrêmement petits, dont le nombre est extrêmement grand quoique fini; à chacun d'eux est appliqué un couple dont les deux composantes ont une existence réelle et un point d'application parfaitement déterminé. Sur la figure, les éléments

sont représentés par les quatre rectangles en trait plein et les couples qui leur sont appliqués sont A_1F_1, B_1G_1 ; A_2F_2, B_2G_2 ; A_3F_3, B_3G_3 ; A_4F_4, B_4G_4.

Dans ces conditions, il est clair que la rupture se produira suivant la ligne pointillée XY.

Pour M. von Helmholtz au contraire le couple n'est qu'une sorte de tendance à tourner qui a une existence propre indé-

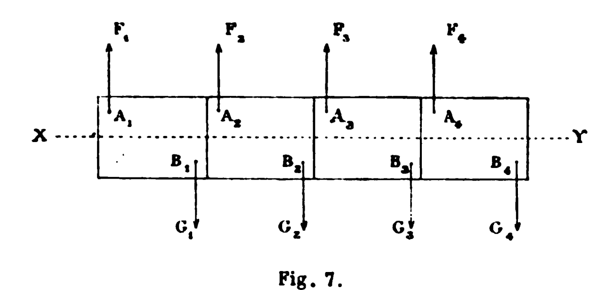


Fig. 7.

pendante de ses deux composantes, qui peuvent ne pas avoir de point d'application déterminé. Le couple existe toutes les fois que la rotation produit un travail.

En d'autres termes Helmholtz suppose que, si loin que l'on pousse la division de la matière, chaque partie restera toujours soumise à un couple. M. Bertrand croit au contraire qu'il arrivera un moment où les parties ultimes de la matière seront soumises à une force unique et qu'en adoptant une autre manière de voir, on est dupe d'une fiction mathématique qui cache la réalité des faits. Il ne serait peut-être pas impossible, même en acceptant le point de vue de M. Bertrand, d'imaginer une distribution des forces qui n'entraînerait pas la rupture des conducteurs. Mais elle serait probablement compliquée et peu naturelle.

Je me bornerai à rappeler que, dans la théorie de Weber, qui n'est qu'un cas particulier de celle de Helmholtz, on peut tout expliquer en supposant que l'action mutuelle de deux éléments se réduit à une force unique dirigée suivant la droite qui les joint. J'ai dit au n° 19 comment cela peut se concilier avec le fait de l'existence d'un potentiel qui est en apparence contradictoire.

24. Equations fondamentales. — Nous avons mis le potentiel électrodynamique mutuel de deux circuits sous la forme (§ 10)

$$T = i\int(Fdx + Gdy + Hdz) \tag{1}$$

dans le cas d'un circuit fermé.

Ici, on a, pour deux circuits quelconques :

$$T = \int\int ii'dsds'\left[\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d^2r}{dsds'}\right] \tag{2}$$

$$\cos\varepsilon\, dsds' = dxdx' + dydy' + dzdz'$$

$$\frac{d^2r}{dsds'}ds = \frac{d^2r}{dxds'}dx + \frac{d^2r}{dyds'}dy + \frac{d^2r}{dzds'}dz$$

Remplaçant dans T, nous pouvons donner à T la forme (1), déjà trouvée dans le cas d'un courant fermé, en posant :

$$F = \int\frac{i'dx'}{r} + \frac{1-k}{2}\int i'ds'\frac{d^2r}{dxds'} \tag{3}$$

Nous désignerons de même par G et H deux expressions analogues qu'on déduirait de la première par symétrie. Nous

dirons que F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur.

Posons

$$\psi = \int i' ds' \frac{dr}{ds'} \tag{4}$$

intégrale étendue au contour C′ et nulle dans le cas d'un courant fermé :

$$\frac{d\psi}{dx} = \int i' \frac{d^2 r}{dx ds'} ds'$$

$$\left\{\begin{aligned} F &= \int \frac{i' dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} \\ G &= \int \frac{i' dy'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dy} \\ H &= \int \frac{i' dz'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dz} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

On peut écrire aussi :

$$\psi = \int i' \left(\frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz' \right) \tag{6}$$

et en effet si on regarde x, y, z comme des constantes on a :

$$dr = \frac{dr}{ds'} ds' = \frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz'$$

25. Donnons à ces équations une forme applicable aux conducteurs à trois dimensions.

Si ρ est la densité de l'électricité libre, $\rho d\tau$ est la quantité d'électricité contenue dans le volume $d\tau$; $ud\omega$ est la quantité qui traverse dans l'unité de temps l'aire $d\omega$ normale à Ox; de même $vd\omega$, l'aire $d\omega$ normale à Oy; $wd\omega$, normale à Oz; on a :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{d\rho}{dt}$$

C'est l'équation dite de continuité (Cf. Ier vol., n° 29).

Le fil conducteur peut être assimilé à un cylindre de section $d\omega$. L'élément de longueur étant ds, $d\tau = d\omega ds$.

La section par un plan perpendiculaire à dx est $\frac{d\tau}{dx}$

$$i = u\frac{d\tau}{dx}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ud\tau = idx \\ vd\tau = idy \\ wd\tau = idz \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u'd\tau' = i'dx' \\ v'd\tau' = i'dy' \\ w'd\tau' = i'dz' \end{array}\right.$$

$$T = \int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} F = \displaystyle\int \frac{u'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx} \\ G = \displaystyle\int \frac{v'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dy} \\ H = \displaystyle\int \frac{w'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dz} \end{array}\right.$$

Transformons aussi ψ

$$\psi = \int \left(u'\frac{dr}{dx'} + v'\frac{dr}{dy'} + w'\frac{dr}{dz'}\right) d\tau'$$

Si nous cherchons le potentiel électrodynamique mutuel total nous avons à prendre l'élément différentiel

$$(Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

où F, G, H sont des intégrales étendues à tous les éléments $d\tau'$ de tous les conducteurs, $d\tau$ excepté. En opérant de la sorte on compte deux fois dans l'intégrale double le potentiel mutuel d'un couple d'éléments $d\tau$ et $d\tau'$. Donc il faut diviser par 2 l'intégrale ainsi calculée pour avoir T :

$$(8) \qquad T = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

On peut dire que l'intégrale est étendue à tout l'espace, car en dehors des conducteurs u, v, w sont nuls.

On pourra, dès lors, appliquer le théorème de Green, relatif à l'intégration par parties dans tout l'espace (¹)

$$\int d\tau'.\, u' \frac{dr}{dx'} = -\int d\tau'.r \frac{du'}{dx'}$$

$$(9) \qquad \psi = -\int r d\tau' \left(\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}\right) = \int r \frac{d\rho'}{dt} d\tau'$$

26. Considérons deux quantités d'électricité $e'e'$; elles se repoussent avec une force d'intensité $\frac{1}{\lambda}\frac{ee'}{r^2}$, λ étant une constante. Si l'on adopte les idées universellement reçues, λ est 1 dans le système d'unités électrostatiques et est le carré de la vitesse de la lumière dans le système électromagnétique. Je

(¹) Nous intégrons par partie par rapport à x entre les limites $+\infty$ et $-\infty$ et, comme u' est supposé nul à l'infini, le terme tout connu disparait. Cf. Iᵉʳ volume, page 12.

conserve λ parce que nous serons conduits à modifier un peu les idées reçues.

Le potentiel électrostatique φ est donné dès lors par :

$$\lambda\varphi = \int \frac{\rho'}{r}\, d\tau'$$

$$\lambda \frac{d\varphi}{dt} = \int \frac{1}{r} \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau'$$

Or :

$$\Delta\psi = \int \Delta r \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau'$$

et comme

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

$$\Delta\psi = \int \frac{2}{r} \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau' = 2\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Appliquons aux deux membres de chacune des équations (7) l'opérateur Δ

$$\Delta \int \frac{u' d\tau'}{r} = -4\pi u$$

d'après le théorème de Poisson.

$$\Delta \frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \Delta\psi = 2\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

(10)
$$\left\{ \begin{aligned} \Delta F &= -4\pi u + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta G &= -4\pi v + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta H &= -4\pi w + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{aligned} \right.$$

Calculons

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=J$$

$$\frac{dF}{dx}=\int u'd\tau'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{1-k}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

Or

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$$

$$\int u'd\tau'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\int u'd\tau'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}=\int\frac{d\tau'}{r}\frac{du'}{dx'}$$

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=\int\frac{d\tau'}{r}\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)+\frac{1-k}{2}\Delta\psi$$

$$=-\int\frac{d\tau'}{r}\frac{d\rho'}{dt}+\frac{1-k}{2}\Delta\psi=-\lambda\frac{d\varphi}{dt}+(1-k)\lambda\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{(11)}\qquad J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=-k\lambda\frac{d\varphi}{dt}.$$

On voit que J serait nul en particulier si on faisait $k=0$.

27. Équations de la loi de Ohm. — La formule $Ri = E-\frac{d(Mi')}{dt}$ s'applique aux courants fermés. Si on l'applique à une portion de courant, il faut tenir compte de la différence de potentiel aux extrémités.

$$Ri=\varphi_0-\varphi_1+E-\frac{d(Mi')}{dt}.$$

Si on a un élément rectiligne parallèle à Ox

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

on peut poser

$$E = X dx$$

$$R = \frac{dx}{C d\omega}$$

C conductibilité spécifique ; d'où

$$Ri = \frac{idx}{Cd\omega} = \frac{udx}{C}$$

Quant à la force électromotrice d'induction, on a ici :

$$T = iFdx = Mii'$$

$$\frac{d(Mi')}{dt} = dx\,\frac{dF}{dt}$$

Les équations de la loi de Ohm s'écrivent donc :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{u}{C} = -\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{dF}{dt} + X \\ \dfrac{v}{C} = -\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{dG}{dt} + Y \\ \dfrac{w}{C} = -\dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{dH}{dt} + Z \end{cases}$$

On peut dire qu'il y a quatre forces électromotrices se faisant équilibre : la force électrostatique, la force d'induction, la force électromotrice extérieure (d'origine chimique, thermoélectrique, etc.), et la force électromotrice résistante, dont les composantes sont $-\frac{u}{C}, -\frac{v}{C}, -\frac{w}{C}$.

L'hypothèse sur laquelle reposent les formules (12), l'extension de la loi de Ohm aux conducteurs à trois dimensions semble très plausible, mais c'est une hypothèse, et M. Bertrand n'en admet pas la légitimité. Nous verrons qu'en faisant sur la généralité de la loi de Joule dans les conducteurs à trois dimensions une hypothèse qui paraît s'imposer [voir formule (18 *bis*), n° **31**], les formules (12) s'accordent avec le principe de la conservation de l'énergie. Il y a plus : on pourrait appliquer aux conducteurs à trois dimensions les équations de Lagrange et de la théorie de l'induction de Maxwell (Ier vol., n° **151**) ; si je ne donne pas dans ces leçons ce calcul, c'est qu'on a ici un nombre infini de paramètres, et que je serais forcé d'employer le calcul des variations.

Je me bornerai à dire que *si l'on admet la formule* (18 *bis*), le calcul conduirait aux équations (12).

28. Définition de la force magnétique. — Dans le cas où *tous les courants sont fermés*, la force magnétique est susceptible de deux définitions équivalentes :

1° On peut dire que la force magnétique, dont nous avons appelé les composantes α, β, γ, est la résultante de toutes les actions électromagnétiques appliquées à un pôle magnétique égal à 1. C'est la définition que nous avons donnée plus haut au § 8. Un pôle magnétique peut être assimilé à un solénoïde indéfini. En effet l'action d'un courant *fermé* sur un solénoïde fermé est nulle ; son action sur un solénoïde limité ne dépend par conséquent que de la position de ses deux extrémités qui peuvent être assimilées à deux pôles magnétiques égaux et de signe contraire ; son action sur un solénoïde indéfini est donc

la même que sur un pôle magnétique unique situé à l'extrémité libre du solénoïde (Cf. Ier vol., n° **124**) ;

2° Considérons un élément magnétique et soient $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$, les composantes de son moment magnétique. Les actions subies par cet élément peuvent se réduire à une force unique appliquée au centre de gravité de l'élément et dont les composantes sont :

$$\left(\frac{d\alpha}{dx} A + \frac{d\alpha}{dy} B + \frac{d\alpha}{dz} C\right) d\tau$$
$$\left(\frac{d\beta}{dx} A + \frac{d\beta}{dy} B + \frac{d\beta}{dz} C\right) d\tau$$
$$\left(\frac{d\gamma}{dx} A + \frac{d\gamma}{dy} B + \frac{d\gamma}{dz} C\right) d\tau$$

et à un couple dont le moment a pour composantes :

$$(C\beta - B\gamma)\, d\tau, \ (A\gamma - C\alpha)\, d\tau, \ (B\alpha - A\beta)\, d\tau$$

En d'autres termes le moment de ce couple est normal au plan des deux vecteurs qui représentent le moment magnétique de l'élément et la force magnétique et est égal au produit de ces deux vecteurs par le sinus de leur angle.

Si l'élément change de direction sans que son centre de gravité se déplace et sans que la *grandeur* de son moment varie, le travail de ce couple est égal à la variation du produit de ces deux mêmes vecteurs par le cosinus de leur angle, c'est-à-dire à la variation de l'expression suivante :

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\tau$$

Imaginons maintenant un circuit fermé infiniment petit, parcouru par un courant d'intensité i; soit $d\omega$ l'aire de ce

circuit; l, m, n les cosinus directeurs de son plan. Ce circuit sera équivalent à un élément magnétique dont le moment aura pour composantes :

$$A d\tau = il d\omega, \qquad B d\tau = im d\omega, \qquad C d\tau = in d\omega$$

Les actions subies par ce circuit se réduiront donc à une force unique appliquée au centre de gravité du circuit et à un couple dont le moment aura pour composantes :

$$(12\,bis) \quad i d\omega (n\beta - m\gamma), \quad i d\omega (l\gamma - n\alpha), \quad i d\omega (m\alpha - n\beta)$$

Si le circuit change de direction sans que son centre de gravité se déplace, sans se déformer et sans que l'intensité i varie, le travail de ce couple sera la variation de l'expression :

$$(12\,ter) \qquad i d\omega (l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

D'où la définition suivante de la force magnétique :

C'est un vecteur dont j'appellerai les composantes α, β, γ et *qui est tel que l'action exercée sur un circuit infiniment petit se réduise à une force appliquée au centre de gravité du circuit et à un couple dont le moment a pour composantes les expressions* (12 *bis*) *et dont le travail est égal à la variation de l'expression* (12 *ter*).

Imaginons maintenant un système S contenant des courants *non fermés*.

La première définition de la force magnétique n'a plus aucun sens.

Il est en effet impossible de réaliser un pôle magnétique isolé à l'aide d'un solénoïde indéfini. Voici pourquoi :

L'action d'un courant *non fermé* sur un solénoïde fermé n'est

pas nulle ; son action sur un solénoïde non fermé ne dépend donc pas seulement de la position des deux extrémités mais de la forme du solénoïde ; et son action sur un solénoïde indéfini ne se réduit pas à une force unique appliquée à son extrémité libre.

Nous sommes donc conduits à adopter la seconde définition.

Cherchons l'expression du potentiel électrodynamique T d'un circuit fermé quelconque C par rapport au système S.

Supposons d'abord que le circuit C soit infiniment petit, l'action du système S sur ce circuit se réduira à une force appliquée à son centre de gravité et à un couple. Si le circuit change de direction sans se déformer, sans que l'intensité varie et sans que son centre de gravité se déplace, le travail de la force sera nul ; celui du couple sera *par définition* égal à la variation de l'expression (12 *ter*), c'est-à dire à :

$$i d\omega\,(\alpha \delta l + \beta \delta m + \gamma \delta n)$$

Si donc l'intensité i du courant, l'aire $d\omega$ du circuit, les coordonnées x, y, z de son centre de gravité ne changent pas ; si par conséquent les cosinus directeurs l, m, n varient seuls on aura :

$$\delta T = i d\omega\,(\alpha \delta l + \beta \delta m + \gamma \delta n).$$

On en déduit :

$$T = i d\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$
$$+ \text{ fonction arbitraire de } i,\ d\omega, \text{ de } x, \text{ de } y \text{ et de } z.$$

Cette fonction arbitraire qui ne contient pas les cosinus directeurs l, m et n est évidemment nulle ; car T doit changer de

signe quand le courant change de sens, ou ce qui revient au même, quand on fait tourner le circuit de 180° autour d'un axe situé dans son plan, ou ce qui revient encore au même, quand on change l, m, n en $-l$, $-m$. et $-n$.

On a donc finalement :

$$T = id\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$

Si le circuit C est fini, on le décomposera en une infinité de circuits infiniment petits ainsi qu'il a été dit au n° **107** du Ier volume et on aura :

$$T = \int id\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n) \tag{13}$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ d'une aire A appartenant à une surface d'ailleurs quelconque passant par le circuit C et limitée par ce circuit.

Quant à l, m, n, ce sont les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$ ou, ce qui revient au même de la normale à la surface à laquelle appartient l'aire A.

29. On a [équation (1)]

$$T = i\int (\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz)$$

$$= i\int d\omega \left[l\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy} - \frac{d\mathrm{G}}{dz}\right) + m\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz} - \frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) + n\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx} - \frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)\right]$$

Comme on a par définition de α, β, γ,

$$T = i\int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, d\omega, \tag{13}$$

il s'ensuit que

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz} \\ \beta = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx} \\ \gamma = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy} \end{cases}$$

Or nous avons déjà (10) et (11)

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u + (1-k)\lambda \dfrac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta G = -4\pi v + (1-k)\lambda \dfrac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta H = -4\pi w + (1-k)\lambda \dfrac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases}$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Calculons $\dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz}$

$$0 = \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d^2F}{dx^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2G}{dxdy} - \frac{dF^2}{dy^2}$$

$$-\frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2H}{dxdz} - \frac{d^2F}{dz^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{dJ}{dx} - \Delta F = -k\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} + 4\pi u - (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz} = 4\pi u - \lambda \dfrac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx} = 4\pi v - \lambda \dfrac{d^2\varphi}{dydt} \\ \dfrac{d\beta}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} = 4\pi w - \lambda \dfrac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases}$$

Dans Maxwell, les derniers termes n'existent pas. Nous verrons en effet que Maxwell suppose $\lambda = 0$.

Les équations (15) se prêtent à la vérification suivante :

En différentiant la première des équations (15) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutant il vient :

$$0 = 4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) - \lambda\Delta\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Or

$$\lambda\varphi = \int\frac{\rho' d\tau'}{r}$$

d'où

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$\lambda\Delta\frac{d\varphi}{dt} = -4\pi\frac{d\rho}{dt}$$

d'où

$$(16) \qquad 4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation de continuité.

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE

30. Expression de l'énergie électrocinétique T et de l'énergie électrostatique U. — Je vais donner de T une expression nouvelle. Dans l'équation (8) je remplace u, v, w,

par leurs valeurs tirées de (15)

$$T=\frac{1}{8\pi}\int\sum\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)\mathrm{F}d\pi+\frac{1}{8\pi}\int\sum\lambda\,\frac{d^2\varphi}{dxdt}\,\mathrm{F}d\tau$$

En intégrant par parties dans tout l'espace (Cf. Introduction), on a :

$$\int\frac{d\gamma}{dy}\,\mathrm{F}d\tau=-\int\frac{d\mathrm{F}}{dy}\,\gamma d\tau$$

La première des intégrales a donc pour valeur

$$\frac{1}{8\pi}\int\left[\alpha\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}-\frac{d\mathrm{G}}{dz}\right)+\beta\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}-\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx}-\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau.$$

La seconde se transforme de même

$$\int\mathrm{F}\,\frac{d^2\varphi}{dxdt}\,d\tau=-\int\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,\frac{d\varphi}{dt}\,d\tau$$

et

$$\frac{\lambda}{8\pi}\int\sum\frac{d^2\varphi}{dxdt}\,\mathrm{F}d\tau=-\frac{\lambda}{8\pi}\int\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{G}}{dy}+\frac{d\mathrm{H}}{dz}\right)d\tau$$

$$=\frac{k\lambda^2}{8\pi}\int\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2d\tau$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau+\frac{k\lambda^2}{8\pi}\int\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2d\tau \tag{16}$$

Si k est positif ou nul, tous les éléments de l'intégrale sont

positifs, et si T est nul, c'est que tous ses éléments sont nuls ; au contraire, si k est négatif, on ne peut affirmer que, du moment que T est nul, tous les éléments soient nuls et qu'il n'y ait pas de courant.

T, énergie électrocinétique, n'est qu'un des termes de l'énergie. L'autre terme est l'énergie électrostatique

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi d\tau$$

Or :

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int \Delta\varphi.\varphi d\tau.$$

D'après le théorème de Green,

$$\int \varphi.\Delta\varphi d\tau = -\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau$$

$$(17)\qquad U = \frac{\lambda}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau$$

U est essentiellement positif.

L'énergie totale T + U est positive si $k \geqslant 0$. Si k est < 0, T + U peut être de signe quelconque. Supposons que F, G, H, soient tels qu'on ait

$$F = \frac{d\chi}{dx}, \qquad G = \frac{d\chi}{dy}, \qquad H = \frac{d\chi}{dz}$$

χ fonction quelconque de x, y, z, les trois binômes (14) sont nuls, et le premier terme disparaît. Le second ne disparaît pas ; supposons $\varphi = 0$ à l'origine des temps, T + U sera néga-

tif; comme $\varphi = 0$ à l'origine des temps il n'y a pas d'électricité libre au début, mais il y en a tout de suite après, car $\frac{d\varphi}{dt}$ n'est pas nul.

zu Anfang

31. Conservation de l'énergie. — Vérifions que l'énergie se conserve, c'est-à-dire que la variation de $T+U$ est égale au travail accompli par les forces électromotrices extérieures (chimiques, thermoélectriques, etc.), diminué de la chaleur dégagée dans les résistances en vertu de la loi de Joule.

$$(18)\quad d(T+U) = -dt\int \frac{u^2+v^2+w^2}{C}\,d\tau + dt\int (Xu+Yv+Zw)\,d\tau$$

Reportons-nous aux équations (12) et multiplions la première par $-u\,d\tau$, la seconde par $-v\,d\tau$, la troisième $-w\,d\tau$, puis intégrons dans tout l'espace et ajoutons : il vient :

$$(18')\quad -\int \frac{u^2+v^2+w^2}{C}\,d\tau + \int (Xu+Yv+Zw)\,d\tau$$

$$= \int \left(u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz}\right) d\tau + \int \left(u\frac{dF}{dt} + v\frac{dG}{dt} + w\frac{dG}{dt}\right).$$

Nous allons démontrer que la première intégrale du second membre est $\frac{dU}{dt}$, la seconde $\frac{dT}{dt}$.

Quant à l'intégrale $\int \frac{u^2+v^2+w^2}{C}\,d\tau$, c'est la chaleur de Joule. Une *ligne de courant* est une ligne qui satisfait aux

équations différentielles $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, c'est-à-dire qui a pour tangente en chaque point la vitesse de l'électricité.

Un conducteur à trois dimensions peut être considéré comme formé d'une infinité de conducteurs linéaires élémentaires ayant la forme de cylindres infiniment petits, de hauteur ds, de section droite $d\omega$, de volume $d\tau = ds d\omega$ et dont la hauteur est dirigée suivant les lignes de courant.

Admettons que la loi de Joule s'applique à ces conducteurs linéaires élémentaires.

Si l'on considère l'un d'eux, la chaleur dégagée dans sa résistance est $Ri^2 dt$; or

$$R = \frac{ds}{C d\omega}$$

et

$$i^2 = (u^2 + v^2 + w^2)\, d\omega^2$$

Donc :

$$(18\ bis)\quad Ri^2 dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}\, ds d\omega dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}\, d\tau .\, dt.$$

32. Je me propose maintenant de démontrer que la première intégrale du deuxième membre est égale à $\frac{dU}{dt}$.

Nous avons vu que

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau$$

Je dis que

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\varphi}{dt} \varphi d\tau$$

Car :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}\int \frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau + \frac{1}{2}\int \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

et d'autre part :

$$\int \frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau = \int \rho \frac{d\varphi}{dt} d\tau.$$

En effet,

$$\varphi = \int \frac{\rho' d\tau'}{\lambda r}$$

et

$$(18\ ter) \qquad \int\int \frac{d\rho}{dt}\rho' \frac{d\tau d\tau'}{\lambda r} = \int\int \rho \frac{d\rho'}{dt}\frac{d\tau d\tau'}{\lambda r},$$

car la première intégrale ne change pas, si on permute ρ et ρ' en même temps que $d\tau$ et $d\tau'$, puisque les deux intégrations par rapport à $d\tau$ et $d\tau'$ s'étendent à tout l'espace.

Donc

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'autre part,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$$

Donc

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau = -\int \varphi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) d\tau$$

d'où en intégrant par parties dans tout l'espace

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau$$

C. Q. F. D.

33. Passons à l'intégrale

$$\int \left(u\frac{dF}{dt} + v\frac{dG}{dt} + w\frac{dH}{dt} \right) d\tau$$

Nous avons vu que

$$T = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\int \sum F\frac{du}{dt} d\tau + \frac{1}{2}\int \sum u\frac{dF}{dt} d\tau;$$

je dis que ces deux intégrales sont égales. Pour le démontrer, posons :

$$F = F' + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx} \qquad F' = \int \frac{u'd\tau'}{r}$$

L'identité à démontrer devient :

$$\int \sum F'\frac{du}{dt} d\tau + \frac{1-k}{2}\int \sum \frac{d\psi}{dx}\frac{du}{dt} d\tau$$

$$= \int \sum \frac{dF'}{dt} u d\tau + \frac{1-k}{2}\int \sum u \frac{d^2\psi}{dxdt} d\tau$$

1° On a :

$$\int F' \frac{du}{dt} d\tau = \int u \frac{dF'}{dt} d\tau,$$

car

$$\int\int u' \frac{du}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r} = \int\int u \frac{du'}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r}$$

Cette identité se démontrerait tout à fait comme l'identité (18 *ter*).

2° On a :

$$\int \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dt} d\tau = \int \sum u \frac{d^2\psi}{dxdt} d\tau$$

car on a, en intégrant par parties dans tout l'espace :

$$\int \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dt} d\tau = -\int \psi \frac{d^2u}{dxdt} d\tau$$

et :

$$\int \frac{d^2\psi}{dxdt} u d\tau = -\int \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{du}{dx} d\tau$$

et on n'a qu'à faire voir que :

$$\int \sum \psi \frac{d^2u}{dxdt} d\tau = \int \sum \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{du}{dx} d\tau.$$

Or, on a :

$$\sum \frac{du}{dx} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\sum \frac{d^2u}{dxdt} = -\frac{d^2\rho}{dt^2}$$

$$\psi = \int \frac{d\rho'}{dt} r d\tau',$$

et l'identité à démontrer revient à :

$$\int\int \frac{d\rho'}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2} r d\tau d\tau' = \int\int \frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho'}{dt^2} r d\tau d\tau'$$

égalité qui se démontrerait comme l'égalité (18 *ter*).

En remplaçant les deux intégrales du second membre de (18') par les valeurs ainsi trouvées, on a :

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -\int \frac{u^2+v^2+w^2}{C} d\tau + \int (Xu + Yv + Zw) d\tau$$

Si on multipliait cette équation par dt, le premier membre représenterait l'accroissement de l'énergie tant électrodynamique qu'électrostatique, la seconde intégrale du second membre représenterait le travail des forces électromotrices extérieures (chimiques, thermoélectriques, etc.); la première intégrale du second membre représenterait l'énergie perdue sous forme de chaleur de Joule.

Cette équation exprime donc bien qu'il y a conservation de l'énergie.

34. Stabilité de l'équilibre. — Dans le cas où il n'y a

aucune force électromotrice extérieure au système, T = (16.) p. 67.

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -\int \frac{u^2+v^2+w^2}{C}\,d\tau, \qquad (9.)$$

U = (17.) p. 68.

la dérivée de T + U par rapport au temps est essentiellement négative.

Si la constante k de Helmholtz est $\geqslant$ o, l'équilibre est stable. En effet, T + U est essentiellement positif et ne s'annule que s'il n'y a ni électricité libre ni courants dans l'espace; si T + U est très petit, c'est que les courants et la densité de l'électricité libre sont partout très petits. Partons de l'équilibre : T + U = o, et faisons subir une petite perturbation, T + U prendra une valeur positive très petite; mais si nous abandonnons le système à lui-même, T + U va aller en diminuant, tout en restant positif : T + U restera donc très petit, ce qui ne peut avoir lieu que si les courants restent eux-mêmes très petits. Donc il y a stabilité.

Au contraire, si k est négatif, nous pouvons encore partir de l'équilibre absolu et faire subir au système une perturbation très petite; mais nous pouvons toujours supposer cette perturbation telle que la valeur initiale très petite que prend T + U soit négative. A partir de là, T + U va diminuer; sa valeur absolue va aller en croissant, et on s'éloignera de plus en plus de l'équilibre primitif. L'équilibre est instable.

Nous devons donc rejeter toute théorie qui donne à k une valeur négative, en particulier la théorie de Weber, qui se déduit de celle de Helmholtz, en faisant $k = -1$.

ÉTUDE DES MILIEUX MAGNÉTIQUES

35. Que deviennent, dans les milieux magnétiques, les équations (14) et (15)?

Définissons d'abord la force et l'induction magnétique en un point. La force magnétique sera la somme géométrique de deux vecteurs :

1° La force électromagnétique, due aux courants fermés ou non, et définie comme au § 28, telle qu'elle serait au point considéré si le milieu n'était pas magnétique : cette force pourra ne pas dériver d'un potentiel, cela aura lieu si au point considéré le courant électrique n'est pas nul ;

2° La force magnétique due aux aimants permanents ou non ; elle pourra se réduire à l'action qu'exerce l'aimantation induite par les courants dans la masse magnétique à l'intérieur de laquelle est pris le point considéré. Cette force dérive toujours d'un potentiel, du potentiel magnétique :

$$\Omega = -\int\left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right)\frac{1}{r}\, d\tau'$$

d'où

$$\alpha = \int\left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right)\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\, d\tau'$$

Quant à l'induction magnétique, elle est la somme géométrique de la force magnétique et de l'aimantation au point considéré multipliée par 4π.

36. Je dis que dans un milieu magnétique, les équations (14) doivent être remplacées par les équations :

$$(19)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz} \\ b = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx} \\ c = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy} \end{cases}$$

et que les équations (15) sont encore vraies.

37. Considérons un aimant ; supposons qu'il n'y ait pas de courant extérieur. L'aimant peut être considéré comme constitué par un système de courants particulaires d'après les idées d'Ampère.

La composante F du potentiel vecteur dû à l'un de ces courants est :

$$F = i' \int \frac{dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx};$$

tous les courants particulaires étant fermés, la dérivée $\frac{d\psi}{dx}$ disparaît, et il reste

$$i' \int \frac{dx'}{r}$$

En transformant cette intégrale de ligne en une intégrale de surface il vient

$$F = i' \int \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\omega'$$

$d\omega'$ étant l'élément de l'aire embrassée par le courant; cette aire est infiniment petite; donc l'intégrale se réduit au seul élément

$$i'd\omega'\left(m'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)$$

Le courant est équivalent à un élément magnétique, dont le moment a pour composantes $A'd\tau'$, $B'd\tau'$, $C'd\tau'$

$$\left\{\begin{aligned} A'd\tau' &= i'l'd\omega' \\ B'd\tau' &= i'm'd\omega' \\ C'd\tau' &= i'n'd\omega' \end{aligned}\right.$$

par suite la composante F du potentiel vecteur dû à cet élément est

$$\left(B'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - C'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)d\tau'$$

Pour avoir la composante due à l'aimant entier il faut intégrer par rapport aux éléments $d\tau'$ du volume de l'aimant, ou, ce qui revient au même, intégrer dans tout l'espace car, à l'extérieur, $A' = B' = C' = 0$.

$$F = \int\left(B'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - C'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)d\tau'$$

Voici le point délicat du calcul : r est la distance de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$, et l'élément $d\tau$ est à l'intérieur de la masse; donc r peut être infiniment petit ; $\frac{1}{r}$ est alors infiniment grand :

s'il est infiniment grand du premier ordre, $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$ l'est du second, et $\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx'^2}$ du troisième; et ainsi de suite.

J'ai à prendre des intégrales triples ; si j'ai sous le signe $\int$ des termes en $\frac{1}{r}$, l'intégrale est finie et déterminée, de même pour des termes en $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$, mais il n'en est plus ainsi si l'on a des dérivées secondes. Si on ne faisait pas attention à cette remarque, on démontrerait aisément que ΔV est nul même à l'intérieur du corps attirant, ce qui est faux.

Je dois donc m'arranger pour ne pas introduire, comme aux § 8 et § 9, les dérivées secondes de $\frac{1}{r}$ par rapport aux coordonnées.

On a, en intégrant par parties dans tout l'espace :

$$\int B' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} d\tau' = -\int \frac{1}{r} \frac{dB'}{dz'} d\tau'$$

On a donc en transformant l'expression de F que nous venons de trouver

$$(20) \quad \begin{cases} F = \int \left(\frac{dC'}{dy'} - \frac{dB'}{dz'}\right) \frac{1}{r} d\tau' \text{ et de même :} \\ G = \int \left(\frac{dA'}{dz'} - \frac{dC'}{dx'}\right) \frac{1}{r} d\tau' \\ H = \int \left(\frac{dB'}{dx'} - \frac{dA'}{dy'}\right) \frac{1}{r} d\tau' \end{cases}$$

Calculons

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dH}{dy} &= \int \frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' - \int \frac{dA'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' \\ -\frac{dG}{dz} &= \int \frac{dC'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' - \int \frac{dA'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' \\ 0 &= \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' \end{aligned} \right.$$

Transformons ces intégrales :

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}$$

parce que r est fonction de $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$. On a donc en tenant compte de cette identité et intégrant par parties par rapport à y' :

$$\frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' = -\int \frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} d\tau' = \int \frac{d^2B'}{dx'dy'} \frac{1}{r} d\tau'$$

et, en intégrant de nouveau par parties par rapport à x'

$$= -\int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} d\tau' = \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau'$$

De même,

$$\int \frac{dC'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' = \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau.$$

D'autre part, si on pose :

$$V = \int \frac{A' d\tau'}{r},$$

l'équation de Poisson nous donne :

$$\Delta V = -4\pi A.$$

D'autre part

$$\frac{dV}{dx} = \int A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' = -\int A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} d\tau' = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{1}{r} d\tau'$$

et

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau'.$$

Les équations (21) s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dx^2} \\ \frac{dH}{dy} &= \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' - \frac{d^2V}{dy^2} \\ -\frac{dG}{dz} &= \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dz^2} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int \left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right) \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \Delta V$$
$$= \alpha + 4\pi A = a.$$

38. Prenons maintenant un milieu magnétique parcouru par des courants finis ; u, v, w sont les composantes du courant ; α_1, β_1, γ_1 sont les composantes de la force électromagnétique due aux courants finis, F_1, G_1, H_1 les composantes de leur potentiel vecteur. De même, α_2, β_2, γ_2 seront les composantes de la force magnétique due aux courants particulaires ; a_2, b_2, c_2 les composantes de l'induction qui leur est due, et F_2, G_2, H_2 les composantes de leur potentiel vecteur. On a pour les composantes de la force magnétique totale, de l'induction totale et du potentiel vecteur total : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et deux équations analogues ;

$$a = \alpha_1 + a_2$$

et

$$F = F_1 + F_2.$$

On a, pour les courants finis, d'après le § 29

$$\alpha_1 = \frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

Pour les courants particulaires, d'après le § 36

$$a_2 = \frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz}, \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{d\beta_2}{dz} = 0$$

d'où, en ajoutant :

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

ce qui était à démontrer.



CHAPITRE V

PASSAGE DE LA THÉORIE DE HELMHOLTZ A CELLE DE MAXWELL

39. Pour se rendre compte de la façon dont on peut passer de la théorie de Helmholtz à celle de Maxwell, qui n'en est qu'un cas particulier ou plus exactement qu'un cas limite, il faut connaître les diverses hypothèses faites au sujet du magnétisme induit et de la polarisation diélectrique. Le présent chapitre est intimement lié au chapitre III du premier volume où j'ai exposé des idées analogues à celles de Helmholtz sous une forme différente.

Avant d'aborder la question de la polarisation diélectrique, rappelons les théories du magnétisme induit. Nous commencerons par celle de Poisson, la plus importante au point de vue de ce qui va suivre. Mais comme les calculs ont été exposés en détail dans le premier volume, paragraphes 52 à 59, nous nous bornerons à rappeler succinctement les résultats. Je dois avertir toutefois que la théorie exposée dans les numéros cités, 52 à 59, se rapportant plus particulièrement aux diélec-

triques, il faut, pour en déduire la théorie du magnétisme qui n'en diffère pas au point de vue mathématique, changer quelques-unes des notations.

C'est ainsi que ce que j'ai appelé $-\frac{dU}{d\xi}$ et h dans ces paragraphes s'appellera ici α et ε. En effet U représentait le potentiel électrique ; il doit être remplacé ici par le potentiel magnétique dont les dérivées changées de signe ne sont autre chose que les composantes de la force magnétique. De même ce que nous appelions K s'appellera ici μ.

Induction magnétique. — Poisson attribue les phénomènes magnétiques à deux fluides, austral et boréal. Un corps magnétique est constitué par de petites sphères conductrices du magnétisme, distribuées irrégulièrement dans un espace intermédiaire isolant. Chaque sphère peut être regardée comme étant la superposition d'une sphère solide de fluide austral et d'une de fluide boréal : l'effet de l'aimantation est de faire glisser l'une de ces sphères par rapport à l'autre d'une quantité plus ou moins grande : on a ainsi des *couches de glissement* (1).

Poisson admet que les actions mutuelles de toutes les autres sphères sur l'une d'elles se neutralisent Si m est la masse de chacune des sphères, australe et boréale, et si ξ, η, ζ sont les composantes du déplacement du centre de la sphère qui glisse, on a

$$m\xi = A d\tau$$
$$m\eta = B d\tau$$
$$m\zeta = C d\tau$$

(1) Voir pour cette théorie des couches de glissement, 1er vol., chap. III, p. 41.

$A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ étant les composantes du moment magnétique de cet élément sphérique.

Pour pouvoir définir la force magnétique en un point intérieur il faut supposer une cavité creusée autour du point, et la force dépend de la forme de cette cavité, contrairement à ce que croyait Poisson. Elle a pour composantes α, β, γ à l'intérieur d'un cylindre infiniment long par rapport à sa base et dont l'axe est dirigé suivant l'aimantation ; les composantes sont $\alpha + 4\pi A$, $\beta + 4\pi B$, $\gamma + 4\pi C$ à l'intérieur d'un cylindre infiniment plat, parallèle aussi à l'aimantation ; enfin, elles sont

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A, \qquad \beta + \frac{4}{3}\pi B, \qquad \gamma + \frac{4}{3}\pi C$$

à l'intérieur d'une sphère.

Décrivons autour du point o une sphère σ de volume $d\tau$, très petite d'une façon absolue, mais grande par rapport aux éléments sphériques ; écrivons qu'il y a équilibre à l'intérieur d'un de ces éléments, s. L'action des corps extérieurs à la sphère σ a pour composante parallèle à Ox, $\alpha + \frac{4}{3}\pi A$. A. B, C sont les composantes de la magnétisation. Si ε est le rapport du volume des petites sphères s au volume $d\tau$ de σ, l'aimantation de chacun de ces éléments s a pour composantes $\frac{A}{\varepsilon}, \frac{B}{\varepsilon}, \frac{C}{\varepsilon}$. L'action sur un point intérieur à s des éléments sphériques extérieurs à s, mais intérieurs à σ, est supposée nulle (Cf. I[er] vol., n° 55). L'action de l'élément s lui-même a pour composante parallèle à Ox, $-\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}$.

L'équilibre s'écrit ainsi :

$$(1) \qquad \alpha + \frac{4}{3}\pi A - \frac{4}{3}\pi \frac{A}{\varepsilon} = 0$$

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi A \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$4\pi A = \frac{3\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon}$$

$$a = \alpha + 4\pi A = \frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon}\alpha = \mu\alpha$$

C'est $\frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon} = \mu$, qu'on appelle la *perméabilité magnétique.*

J'insiste sur la signification de l'équation (1).

Une molécule magnétique située à l'intérieur de la sphère s qui est conductrice du magnétisme doit être en équilibre sous l'action de toutes les forces qui agissent sur elle. Si l'on considère seulement les composantes parallèles à l'axe des x, la somme de ces composantes doit être nulle. On a donc :

(Action des aimants extérieurs et des éléments magnétiques extérieurs à $\sigma = \alpha + \frac{4}{3}\pi A) +$ (action des éléments magnétiques intérieurs à σ et autres que $s = 0 + \left(\text{action de } s = -\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}\right) = 0$.

La théorie présente des difficultés; ε doit être $< \frac{\pi}{6}$, ce qui impose à μ une limite supérieure qui est dépassée pour le fer. On peut dire, il est vrai, que rien n'obligeait à considérer des éléments sphériques; on peut, comme l'a fait M. Mathieu, prendre des éléments d'autres formes, et l'on échappe à cette

difficulté. Une autre difficulté c'est que μ n'est pas une constante mais varie avec la force $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Weber suppose des éléments déjà polarisés, mais orientés d'une manière quelconque : la force magnétique les ramène à une direction commune, ce qui se rapproche des idées d'Ampère.

Quant au diamagnétisme, remarquons que pour s'en rendre compte dans les idées de Poisson, il faut admettre que le vide est susceptible de polarisation magnétique et que les corps diamagnétiques sont seulement moins magnétiques que le vide. Alors le μ du vide n'est plus 1 : on nous avait défini l'unité de magnétisme en admettant que deux pôles égaux à 1 s'attirent avec une force 1 à l'unité de distance ; si $\mu = 1$ pour le vide, l'attraction observée dans le vide est bien l'attraction réelle. Il n'en est plus de même si $\mu > 1$.

40. Polarisation diélectrique. — Mossotti est arrivé à rendre compte des phénomènes que présentent les diélectriques dans les idées de Coulomb, en transportant les théories de Poisson à l'électricité, et ces théories, qui ne sont plus que de l'archéologie en magnétisme, peuvent encore servir dans l'étude des diélectriques, sans pourtant correspondre probablement à aucune réalité objective.

Les diélectriques seraient composés de sphères conductrices plongées dans un milieu isolant. Ce qui joue le rôle de l'aimantation, c'est la *polarisation diélectrique*, que Maxwell appelle *déplacement électrique* : f, g, h.

$$m\xi = f d\tau$$
$$m\eta = g d\tau$$
$$m\zeta = h d\tau$$

Un diélectrique constitué de la sorte est tout à fait assimilable à un aimant; je veux dire que le fluide électrique y est distribué absolument de la même façon que le fluide magnétique dans un aimant constitué comme le suppose Poisson.

Le potentiel magnétique d'une masse magnétique m par rapport à un point extérieur est $\frac{m}{r}$. Le potentiel électrique d'une masse électrique m est de même, d'après les notations que nous avons adoptées, $\frac{m}{\lambda r}$.

Le potentiel d'une des sphères de Poisson par rapport à un point extérieur est, en appelant $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ les composantes du moment magnétique de cette sphère :

$$d\tau' \left(A \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + B \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + C \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

De même le potentiel d'une des sphères de Mossotti par rapport à un point extérieur sera :

$$\frac{d\tau'}{\lambda} \left(f \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + g \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + h \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

De même donc que le potentiel d'un aimant est représenté par l'intégrale :

$$\Omega = \int d\tau' \left(A' \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + B' \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + C' \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

celui d'un diélectrique sera représenté par l'intégrale :

$$\psi = \int \frac{d\tau'}{\lambda} \left(f' \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

La force magnétique (parallèle à l'axe de x) due à un aimant est en un point extérieur $\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}$, la force électrostatique due à un diélectrique sera de même $-\frac{d\varphi}{dx}$.

Si l'on veut calculer cette force en un point intérieur, on retrouve l'analogie avec les aimants. Il faut pour la définir supposer une petite cavité creusée dans le diélectrique autour du point considéré ; on voit alors que la composante parallèle à l'axe des x est égale :

à $-\frac{d\varphi}{dx}$ si la cavité est un cylindre très allongé;

à $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{\lambda}$ si elle est un cylindre très aplati;

à $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{3\lambda}$ si elle est sphérique.

Ecrivons comme précédemment les équations de l'équilibre, il faut seulement ajouter ici les forces électromotrices d'induction, et d'autre part les forces électromotrices d'origine quelconque, chimique par exemple ou thermoélectrique, et dont j'appelle les composantes X, Y et Z.

α doit être ici remplacé par $-\frac{d\varphi}{dx}$, φ étant le potentiel électrostatique.

Une molécule électrique située à l'intérieur d'une des sphères s de Mossotti doit être en équilibre; si donc on considère les forces électromotrices d'origine diverse auxquelles cette molécule est soumise et les composantes de ces forces suivant l'axe des x, la somme de ces composantes doit être nulle, ce qui nous donne une équation tout à fait analogue à

l'équation (1); nous supposerons comme plus haut que l'on a creusé dans le diélectrique une cavité limitée par une sphère σ concentrique à s; on aura :

(action des conducteurs extérieurs et de la portion du diélectrique extérieure à $\sigma = -\frac{d\lambda}{dx} + \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda}\Big)$ + (action des sphères de Mossotti intérieures à σ et autres que $s = o$) + $\Big($action de $s = -\frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda\varepsilon}\Big) + \Big($forces d'induction $= -\frac{dF}{dt}\Big)$ + (forces électromotrices extérieures, d'origine diverse $= X) = o$ c'est-à-dire :

$$-\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X + \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda} - \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\varepsilon\lambda} = o$$

$$\frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X;$$

ou en posant :

$$K = \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon},$$

on a :

$$\frac{4\pi f}{K-\lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X. \qquad (2)$$

K est le *pouvoir inducteur spécifique* du milieu.

Proposons-nous d'évaluer le courant de déplacement qui se produit dans un diélectrique quand son état de polarisation se modifie. Nous avons défini plus haut les composantes u, v et w du courant. Cette définition peut encore s'énoncer comme il suit : *$ud\tau$ est la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de toutes les molécules électriques contenues dans l'élément de volume $d\tau$.* Considérons un

élément $d\tau$ contenant une sphère de Mossotti. Quand cette sphère est polarisée on peut la regarder comme formée de deux sphères, l'une de fluide positif, l'autre de fluide négatif, dont les masses électriques sont égales et de signe contraire, qui ont même volume et dont les centres ne coïncident pas (voir Ier volume, n° 47). Soient $+m$ et $-m$ les masses des deux sphères ; soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de la sphère positive ; $x_2 = x_1 - \xi$, $y_2 = y_1 - \eta$, $z_2 = z_1 - \zeta$ celles du centre de la sphère négative.

Alors ξ, η, ζ, ont la même signification qu'au début du paragraphe.

On a pour la composante parallèle à Ox du courant dû au déplacement relatif des deux sphères :

$$u d\tau = m \frac{dx_1}{dt} - m \frac{dx_2}{dt} = m \frac{d\xi}{dt} = d\tau \frac{df}{dt}$$

De même

$$v = \frac{dg}{dt}$$

$$w = \frac{dh}{dt}$$

41. Le potentiel électrostatique φ est dû à l'électricité répandue dans les conducteurs et à celle qui polarise les diélectriques : ceux-ci se comportent comme des aimants.

On a donc

$$\varphi = \frac{1}{\lambda}\int \frac{\sigma' d\tau'}{dr} + \frac{1}{\lambda}\int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau'$$

en appelant σ la densité au point (x, y, z) du conducteur.

Dans cette équation la première intégrale représente le potentiel dû à l'électricité libre des conducteurs, la seconde le potentiel dû à l'électricité polarisée dans les diélectriques.

D'ordinaire il n'y a d'électricité libre qu'à la surface des conducteurs. Appelons $[\sigma]$ la densité *superficielle* de cette électricité au point x, y, z de cette surface, $[\sigma']$ la densité superficielle au point x', y', z'. S'il y a de l'électricité non seulement à la surface, mais à l'intérieur des conducteurs j'appellerai de même σ la densité de *volume* de l'électricité au point x, y, z du conducteur.

Nous avons alors :

$$\lambda\varphi = \int \frac{\sigma' d\tau'}{r} + \int \frac{[\sigma'] d\omega'}{r} + \int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau'$$

la première intégrale doit être étendue à tous les éléments de volume $d\tau'$ des conducteurs, la troisième à tous les éléments $d\tau'$ des diélectriques et la seconde à tous les éléments $d\omega'$ de la surface qui sépare les conducteurs des diélectriques.

La troisième intégrale peut se transformer par l'intégration par parties et donne :

$$(8) \quad \int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau' = \int (l'f' + m'g' + n'h') d\omega' - \int \left(\frac{df'}{dx'} + \frac{dg'}{dy'} + \frac{dh'}{dz'} \right) d\tau'$$

Dans le second membre, la première intégrale doit être étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la surface qui limite les diélectriques et la seconde à tous les éléments de volume des diélectriques.

Pour abréger les écritures dans l'équation (3), j'ai supposé que les propriétés du diélectrique varient d'une manière continue de telle sorte que f, g, h soient des fonctions continues ; si donc on a plusieurs diélectriques différents je supposerai, ainsi que je l'ai expliqué dans la préface, qu'ils sont séparés les uns des autres par une *couche de passage* très mince. Au contraire je regarderai les diélectriques comme séparés des conducteurs par une surface géométrique de telle façon que les propriétés du milieu varient *brusquement* quand on traverse cette surface.

Posons maintenant

$$\rho = \sigma \text{ dans les conducteurs}$$

$$\rho = -\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dy} - \frac{dh}{dz} \text{ dans les diélectriques;}$$

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh$$

à la surface de séparation des conducteurs et des diélectrique ; il viendra :

$$\lambda\varphi = \int \rho' \frac{d\tau'}{r} + \int \frac{[\rho'] \, d\omega'}{r}$$

En d'autres termes tout se passera comme si l'on avait de l'électricité répandue dans tout l'espace avec une densité ρ et d'autre part de l'électricité répandue à la surface des conducteurs avec la densité superficielle $[\rho]$.

Il est aisé de se rendre compte de ce résultat :

Si l'on considère un aimant, on sait que tout se passe comme si la densité magnétique à l'intérieur était $-\frac{dA}{dx}-\frac{dB}{dy}-\frac{dC}{dz}$ et la densité superficielle à la surface de l'aimant égale à $Al + Bm + Cn$. Les diélectriques étant assimilables à des aimants, tout se passe comme si on avait à l'intérieur des diélectriques une densité électrique $-\frac{df}{dx}-\frac{dg}{dy}-\frac{dh}{dz}$ et à la surface une densité égale à $lf+mg+nh$.

Si on considère donc la surface de séparation d'un conducteur et d'un diélectrique, qui sera par exemple extérieur à cette surface, nous aurons à l'intérieur de cette surface une couche électrique infiniment mince de densité $[\sigma]$, provenant de l'électricité qui, libre de circuler dans le conducteur, s'est portée à sa surface ; et nous aurons d'autre part à l'extérieur de cette surface une couche infiniment mince, de densité $lf+mg+nh$, provenant de la polarisation du diélectrique.

Tout se passera en définitive comme si nous avions une couche unique de densité $[\rho]$.

Il importe de ne pas confondre ces deux densités superficielles $[\rho]$ et $[\sigma]$ dont la définition est très différente.

Dans un diélectrique, on a :

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=-\rho,$$

et en différentiant par rapport au temps, on retrouve l'équation de continuité :

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=-\frac{d\rho}{dt}$$

42. Il y a une remarque à faire. Une molécule électrique située à l'intérieur d'une sphère de Mossotti est soumise à une force électrostatique dont la composante parallèle à Ox est :

$$(4) \qquad X = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\pi f}{K - \lambda}$$

On peut s'étonner de voir que la force n'est pas la dérivée du potentiel, changée de signe. C'est que le diélectrique n'est pas un milieu homogène, le potentiel vrai varie irrégulié-

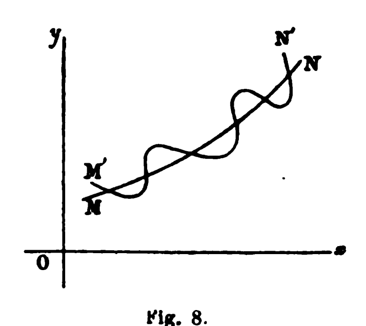


Fig. 8.

rement; à l'état statique, par exemple, il est constant à l'intérieur de chacune des sphères de Mossotti et variable au dehors. Un observateur traversant le diélectrique en ligne droite verra le potentiel varier suivant une courbe telle que la courbe M'N' de la figure 8; cette courbe présente des sinuosités.

La fonction φ définie par les équations du n° 37 est au contraire continue ainsi que toutes ses dérivées; ce n'est qu'à cette condition qu'elle peut être introduite dans les calculs avec avantage; cette fonction φ, qu'on pourrait appeler

potentiel moyen, n'est donc pas rigoureusement égale au potentiel vrai, mais la différence est très petite et du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux sphères de Mossotti ([1]).

Ce potentiel vrai oscille autour d'une valeur moyenne qui est φ, les deux courbes représentant le potentiel vrai (M'N') et le potentiel moyen (MN) sont extrêmement voisines, *mais les tangentes sont très différentes*, et c'est pourquoi la force, qui est la dérivée du potentiel vrai (au signe près), est très différente de la dérivée du potentiel moyen.

43. Expression de l'énergie électrostatique dans le cas de diélectriques. — Une force électromotrice (X, Y, Z) appliquée à une masse d'électricité m placée en un point

[1] Si on considère par exemple un point situé en dehors de ces sphères le potentiel moyen est égal à *l'intégrale*

$$\int\left(f'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)d\tau'$$

et le potentiel vrai est égal à la *somme*

$$\sum\left(f'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)\Delta\tau'$$

obtenue en décomposant le volume du diélectrique en éléments $\Delta\tau'$ contenant chacun une sphère de Mossotti et une seule et par conséquent finis quoique extrêmement petits.

On voit ainsi avec quel degré d'approximation le « potentiel moyen » représente le « potentiel vrai ». Ces différences n'ont aucune importance, puisque d'une part rien n'empêche de supposer les sphères aussi petites qu'on le veut, et que d'autre part les hypothèses de Mossotti ne doivent être considérées que comme une manière commode de considérer les choses et n'ont probablement aucun rapport avec la réalité des faits. J'ai cru néanmoins devoir entrer dans tous ces détails afin de lever une apparente contradiction.

(x, y, z) produit dans le temps dt un travail.

$$m\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

Pour toutes les masses de l'élément $d\tau$, le travail rapporté à l'unité de temps est :

$$X\sum m\frac{dx}{dt}=Xud\tau,$$

et pour le volume entier, on a le travail :

$$\int(Xu+Yv+Zw)\,d\tau$$

On a (4) p. 95 :

$$X=-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{4\pi f(1-\varepsilon)}{3\lambda\varepsilon}=-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{4\pi f}{K-\lambda}$$

$$Y=-\frac{d\varphi}{dy}-\frac{4\pi g}{K-\lambda}$$

$$Z=-\frac{d\varphi}{dz}-\frac{4\pi h}{K-\lambda}.$$

Le travail, changé de signe, est $\frac{dU}{dt}$ (en appelant U l'énergie électrostatique) ; donc :

$$\frac{dU}{dt}=\int\left(u\frac{d\varphi}{dx}+v\frac{d\varphi}{dy}+w\frac{d\varphi}{dz}\right)d\tau+\frac{4\pi}{K-\lambda}\int(uf+vg+wh)\,d\tau.$$

La première intégrale est égale à :

$$-\int\varphi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau=\int\varphi\frac{d\rho}{dt}d\tau$$

Mais

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

L'intégrale est donc :

$$-\frac{1}{4\pi}\int \lambda\varphi \frac{d\Delta\varphi}{dt} d\tau = -\frac{\lambda}{4\pi}\int \varphi . \Delta \frac{d\varphi}{dt} d\tau = \frac{\lambda}{4\pi}\int \sum \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{8\pi}\frac{d}{dt}\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

La seconde intégrale est :

$$\int \sum ufd\tau = \int \sum f\frac{df}{dt} d\tau = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\lambda}{8\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

$$+ \frac{2\pi}{K-\lambda}\frac{d}{dt}\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau.$$

Nous supposerons qu'à l'origine des temps tous les conducteurs partent de l'état neutre et qu'il ny a ni électricité libre ni courant.

On a donc pour $t = 0$:

$$U = 0$$

et pour une époque ultérieure quelconque :

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

$$+ \frac{2\pi}{K-\lambda}\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau.$$

44. Telle est l'expression générale de l'énergie électrostatique. Quand on a affaire à des phénomènes purement électrostatiques, l'expression se simplifie : on a en effet :

$$f = -\frac{d\varphi}{dx}\frac{4\pi}{K-\lambda},$$

et deux autres équations analogues d'où :

$$\frac{2\pi}{K-\lambda}f^2 = \frac{K-\lambda}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$

Il vient donc :

$$U = \int d\tau \left[\frac{\lambda}{8\pi}\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{K-\lambda}{8\pi}\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right]$$

Ou enfin :

$$(5) \qquad U = \int \frac{d\tau . K}{8\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$$

D'autre part nous avons à l'intérieur des conducteurs :

$$(6) \qquad \varphi = \text{const.}$$

à l'intérieur des diélectriques, l'équation de Poisson nous donne :

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho = 4\pi\sum\frac{df}{dx}$$

d'où :

$$\lambda\sum\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\sum\frac{d}{dx}\left[(K-\lambda)\frac{d\varphi}{dx}\right]$$

ou

$$(7) \qquad \sum \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\,\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$$

Considérons maintenant un point de la surface de séparation des conducteurs et des diélectriques. Nous poserons, conformément à une notation généralement adoptée :

$$(8) \qquad \frac{d\varphi}{dn} = l\,\frac{d\varphi}{dx} + m\,\frac{d\varphi}{dy} + n\,\frac{d\varphi}{dz}$$

Nous aurons alors (en nous rappelant que φ est constant à l'intérieur des conducteurs) en un point situé dans le diélectrique mais infiniment voisin de la surface de séparation :

$$\lambda\,\frac{d\varphi}{dn} = -4\pi\,[\rho]$$

Nous avons posé

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh$$

nous supposions alors que l, m, n étaient les cosinus directeurs de la normale *dirigée vers le conducteur* ; si nous supposons comme dans la formule (8) que l, m, n sont les cosinus de la normale *dirigée vers le diélectrique*, il faudra écrire :

$$[\rho] = [\sigma] - \sum lf$$

d'où :

$$\lambda\frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] + 4\pi\sum lf = -4\pi[\sigma] - (\mathrm{K} - \lambda)\sum l\,\frac{d\varphi}{dx}$$

ou

$$\lambda\,\frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] - (\mathrm{K} - \lambda)\,\frac{d\varphi}{dn}$$

ou enfin :

$$K \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] \tag{9}$$

j'observe enfin que l'on a :

$$\text{(10)} \quad \text{charge d'un conducteur quelconque} = \int [\sigma] d\omega$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de ce conducteur.

Les équations (6), (7), (9) et 10 suffisent pour nous faire connaître la fonction φ quand on connaît la charge de chaque conducteur.

L'équation (5) nous fait connaître ensuite l'énergie U et comme nous savons que le travail virtuel des attractions électrostatiques est égal à l'accroissement virtuel de cette énergie, nous pouvons en déduire la valeur de ces attractions.

Ainsi, si nous connaissons la charge et la position de chaque conducteur, les équations (5), (6), (7), (9) et (10) nous feront connaître les attractions électrostatiques. Mais dans ces équations la constante λ ne figure pas ; nous n'y voyons figurer que le pouvoir inducteur K.

Les attractions électrostatiques, pour des charges et des positions données des conducteurs, *qui sont l'unique objet des expériences électrostatiques*, ne dépendent donc pas de λ. Ces expériences ne peuvent donc pas nous faire connaître λ, mais seulement le pouvoir inducteur K qui est fonction à la fois de λ et de ε.

Nous désignerons par K_0 le pouvoir inducteur du vide et par ε_0 la valeur de ε relative au vide.

Dans les théories anciennes on suppose que le vide ne

contient pas de sphères de Mossotti, qu'il ne s'y produit pas de polarisation diélectrique, c'est-à-dire que $\varepsilon_0 = 0$ d'où :

$$\lambda = K_0$$

et pour un diélectrique quelconque :

$$\varepsilon = \frac{K - K_0}{K + 2K_0}$$

Mais rien n'oblige à supposer $\varepsilon_0 = 0$. C'est ainsi que dans la théorie du magnétisme induit, après avoir supposé que pour le vide $x = 0$, $\mu = 1$ on a été conduit, pour expliquer le diamagnétisme, à supposer que le μ du vide est plus grand que 1, c'est-à-dire que le vide est faiblement magnétique (Cf. § 35). On peut faire ici une hypothèse analogue.

Comme les expériences électrostatiques ne nous font connaître que K et K_0, les *phénomènes électrostatiques peuvent s'expliquer quelle que soit la valeur plus petite que K_0, attribuée à* λ pourvu que l'on suppose en même temps :

$$\varepsilon_0 = \frac{K_0 - \lambda}{K_0 + 2\lambda} \text{ et pour un diélectrique quelconque (}^1\text{) } \varepsilon = \frac{K - \lambda}{K + 2\lambda}$$

K est exprimé en fonction de λ et de ε, mais ni λ, ni ε n'entrent

(1) Ces formules supposent que, comme Poisson et Mossotti, on attribue la forme sphérique aux parties conductrices du diélectrique. Cette hypothèse ne joue dans la théorie aucun rôle essentiel, elle sert seulement à simplifier les calculs. Si on supposait que la forme des parties conductrices est quelconque, on arriverait à un résultat analogue et on trouverait :

$$K = \lambda\varphi(\varepsilon)$$

$\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction qui se comporte comme $\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon}$, je veux dire qu'elle croît avec ε, qu'elle est égale à 1 pour $\varepsilon = 0$ et infinie pour $\varepsilon = 1$.

séparément dans l'expression de l'énergie électrostatique. Si on change λ en même temps que ε de manière à laisser K invariable, on ne changera rien à l'expression de ce que nous pouvons connaître expérimentalement. L'expérience ne nous fera donc pas connaître λ si nous nous en tenons aux phénomènes électrostatiques.

45. Dans les idées de Mossotti, ordinairement reçues, $\varepsilon = 0$. Alors $K_0 = \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon} = \lambda$. Deux unités d'électricité placées à l'unité de distance, se repoussent avec une force $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K_0}$. Mais on peut aussi expliquer les phénomènes en admettant que ε_0 ne soit pas nul, même pour l'air et pour le vide. Alors $K_0 > \lambda$, et $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{K_0}$. La répulsion *réelle* entre deux unités d'électricité est plus grande que $\frac{1}{K_0}$, mais la répulsion *observée* dans le vide est toujours $\frac{1}{K_0}$: elle n'est pas modifiée. Elle est seulement plus petite que la répulsion réelle à cause de l'action de sens contraire due à la présence des sphères polarisées. *La théorie de Maxwell consiste à faire* $\lambda = 0$. Pour que K soit fini, il faut que ε soit égal à 1. C'est-à-dire que les parties conductrices occupent la totalité du volume du diélectrique. Cela revient à se représenter les diélectriques comme des cellules conductrices séparées par des cloisons isolantes d'épaisseur infiniment petite par rapport aux dimensions de ces cellules [1] (Cf. Ier vol., n° 61, sqq.). La répulsion réelle entre deux molécules unités serait infiniment grande, λ étant nul,

[1] Ceci ne doit pas être pris à la lettre. Il serait difficile d'admettre que le vide eût une semblable constitution. Il ne faut voir là qu'une façon d'exprimer ce fait que, dans le diélectrique, l'électricité ne circule pas, ne se déplace pas, il y a seulement polarisation.

mais la répulsion observée entre ces deux molécules, plongées dans le diélectrique, est finie.

Les phénomènes électrodynamiques ordinaires ne dépendent pas non plus de la valeur de λ et ne peuvent nous faire connaître cette valeur ; en effet, $\frac{dF}{dt}$ est nul pour des courants constants. L'équation (2), § 40, s'écrit donc :

$$\frac{4\pi f}{K-\lambda}=-\frac{d\varphi}{dx}$$

(puisque les forces électromotrices d'origine diverse que nous avons représentées par X sont généralement nulles).

On retombe donc sur les équations du n° 40.

Dans le cas des courants variables ordinaires, $\frac{dF}{dt}$ est généralement négligeable, il faudra avoir recours à des courants alternatifs très rapides, comme dans les expériences de Hertz si l'on veut que $\frac{dF}{dt}$ soit assez grand pour que l'influence du terme en λ se fasse sentir.

La théorie de Maxwell n'est donc en définitive qu'un *cas limite* plutôt qu'un cas particulier de la théorie de Helmholtz. Il faut pour passer de l'une à l'autre attribuer à λ une valeur *infiniment petite*.

Voyons ce que deviennent dans ce cas les diverses quantités que nous avons envisagées :

1° Le potentiel électrostatique φ, ainsi que les densités σ et $[\sigma]$ qui, d'après le n° 40, ne dépendent pas de la valeur attribuée à λ *restent finis;*

2° Au contraire les densités que nous avons appelées ρ et $[\rho]$ sont des *infiniment petits* du même ordre que λ.

On peut s'étonner que le potentiel φ et les attractions électrostatiques restent finis bien que les densités électriques ρ et $[\rho]$ soient infiniment petites; mais je rappellerai :

1° Que nous avons trouvé :

$$\varphi = \int \frac{[\rho'] \, d\omega'}{\lambda r} + \int \frac{\rho' d\tau'}{\lambda r}$$

d'où il suit que φ est fini si ρ, $[\rho]$ et λ sont des infiniment petits de même ordre ;

2° Que le travail des forces électrostatiques qui est égal à la variation de la fonction U définie par l'équation (5) du n° **44** est également fini.

On peut d'ailleurs s'expliquer la chose d'une autre manière.

Rappelons, ainsi que je l'ai exposé dans le premier volume, que, d'après la manière de voir que nous avons été conduits à adopter, les diélectriques sont constitués par des cellules conductrices séparées par des cloisons infiniment minces et que chacune de ces cloisons isolantes représente un condensateur dont les deux cellules voisines sont les armatures.

Ces deux armatures ont des charges égales et de signe contraire q et $-q$; comme la cloison est infiniment mince, l'action de ces deux charges sur un point extérieur est du même ordre de grandeur que l'épaisseur δ de la cloison divisée par λ et multipliée par q; si donc, comme nous le supposons, δ et λ sont de même ordre, cette action sera de même ordre que q.

Il y a deux remarques à faire au sujet du calcul des actions électrostatiques :

1° Nous avons fait ce calcul en partant de l'expression U.

On emploie souvent en électrostatique une autre méthode qui est applicable à un conducteur *libre* placé dans un diélectrique impolarisable ($\varepsilon = 0$). On considère les diverses molécules électriques répandues à la surface des conducteurs et les forces auxquelles elles sont soumises et on les compose d'après les lois de la statique. Cette méthode appliquée à un conducteur placé dans un diélectrique polarisable constitué d'après les idées de Mossotti donnerait des résultats erronés et si on l'appliquait au cas d'un diélectrique constitué conformément à la théorie de Maxwell et aux idées exposées dans le présent numéro, on trouverait une attraction infinie. En effet ce conducteur ne pourrait se déplacer sans déranger les sphères de Mossotti ou les cellule conductrices, ce qui produirait un travail électrostatique négatif et par conséquent une résistance dont il y a lieu de tenir compte ;

2° Il ne faudrait pas non plus pour calculer U partir de la formule :

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi d\tau$$

ce qui donnerait $U = 0$ puisque $\rho = 0$

En effet la fonction n'est pas continue puisqu'elle varie brusquement quand on passe d'une cellule à l'autre. Si nous revenons aux petits condensateurs dont je parlais tout à l'heure et si nous appelons q et q' les charges des deux armatures, φ et φ' leur potentiel ; $q + q'$ sera de l'ordre de λ, mais ce n'est pas une raison pour qu'il en soit de même de $q\varphi + q'\varphi'$ puisque $\varphi - \varphi'$ n'est pas un infiniment petit de l'ordre de λ.

On a d'ailleurs

$$\int \rho d\tau = \sum (q + q')$$
$$\int \rho\varphi d\tau = \sum (q\varphi + q'\varphi')$$

les intégrations étant étendues à un volume quelconque et les sommations à tous les petits condensateurs contenus dans ce volume.

On conçoit donc comment la première intégrale peut être nulle sans que la seconde le soit.

46. Vitesses de propagation des perturbations électromagnétiques. — Cherchons comment se propagent, dans les diverses théories électromagnétiques en présence, les perturbations électrodynamiques. Si les vitesses de propagation, qui sont fonctions des quantités λ, k et K sont accessibles à l'expérience, ce sera un moyen de déterminer quelqu'une de ces quantités.

On a dix équations aux dérivées partielles définissant les dix quantités u, v, w, α, β, γ, F, G, H et φ.

Considérons en effet un diélectrique de pouvoir inducteur K

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt}.$$

En différentiant par rapport à t,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4\pi u}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d^2F}{d^2t} \\ \frac{4\pi v}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - \frac{d^2G}{dt^2} \\ \frac{4\pi w}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \frac{d^2H}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

D'autre part, on a les équations (15) du § 29

pg. 55

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dx\,dt}$$

les équations (19) du § 36 :

$$a = \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

et

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Soit une perturbation électromagnétique dans le milieu diélectrique. Supposons qu'on ait une onde plane perpendiculaire à Ox : les quantités qui figurent dans les équations sont fonctions seulement de x et de t. Les équations deviennent :

(I) $$\frac{4\pi u}{K - \lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d^2F}{dt^2}$$

(II) $$\frac{4\pi v}{K - \lambda} = -\frac{d^2G}{dt^2}$$

(III) $$\frac{4\pi w}{K - \gamma} = -\frac{d^2H}{dt^2}$$

(IV) $$4\pi u = \lambda \frac{d^2\varphi}{dx\,dt}$$

(V) $$4\pi v = -\frac{d\gamma}{dx}$$

(VI) $$4\pi w = \frac{d\beta}{dx}$$

(VII) $$\mu\alpha = 0$$

(VIII) $$\mu\beta = -\frac{dH}{dx}$$

(IX) $$\mu\gamma = \frac{dG}{dx}$$

(X) $$\frac{dF}{dx} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

1° Étudions d'abord l'onde longitudinale. Supposons

$$G = H = v = w = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Il reste F, φ, u, et on n'a qu'à satisfaire aux trois équations (I), (IV) et (X) : les autres sont satisfaites d'elles-mêmes :

Comparons (I) et (IV)

$$\frac{\lambda}{K-\lambda} \cdot \frac{d^2\varphi}{dxdt} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2}$$

d'où

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt}\left(1 + \frac{\lambda}{K-\lambda}\right) = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} \cdot \frac{K}{K-\lambda}$$

D'autre part, d'après (X)

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -k\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2} \frac{K}{(K-\lambda)\,k\lambda}$$

La vitesse de propagation des ondes longitudinales est :

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{(K-\lambda)\,k\lambda}}$$

2° Ondes transversales. On peut satisfaire aux équations en posant :

$$F = H = u = w = \alpha = \beta = \varphi = 0$$

Restent G, γ, v et les trois équations (II), (V) et (IX).

Comparant (II) et (V),

$$\frac{1}{K-\lambda} \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^2G}{dt^2}$$

Mais (IX)

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{d^2G}{dx^2}$$

d'où

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{\mu(K - \lambda)} \frac{d^2G}{dx^2}$$

La vitesse de propagation est :

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu(K - \lambda)}}$$

47. Il y a des cas où l'onde longitudinale ne peut se propager.

$$k = 0$$
$$\lambda = 0$$
$$K = \lambda$$

La vitesse de propagation est alors infinie. C'est l'hypothèse de Maxwell ; les vibrations sont alors transversales.

Pour les ondes transversales, si $\lambda = K$, la vitesse de propagation est infinie. C'est ce qui a lieu dans l'ancienne théorie de Mossotti, d'après laquelle λ est égal à la valeur K_0 du pouvoir inducteur du vide; $\mu_0 = 1$. Dans cette théorie, dans le vide (ou dans l'air), il n'y a pas propagation d'onde transversale, pas plus que d'onde longitudinale.

Dans la théorie de Maxwell, il n'y a que des vibrations transversales et leur vitesse de propagation V_2 est égale à la vitesse v de la lumière. Nous nous supposons placés dans le système électromagnétique, l'expérience nous apprend que K_0 est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière; $\mu_0 = 1$. Si on donne à λ la valeur o, on a $V_2 = v$. Si on donne à λ une valeur positive différente de o, on a pour V_2 une vitesse supérieure à celle de la lumière. La théorie de Maxwell se déduit donc de la théorie de Helmholtz en faisant $\lambda = 0$.

48. Reprenons les équations avec cette valeur de λ.

$$\frac{4\pi f}{K} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt}$$

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

$$a = \mu\alpha = \frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dz}$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Écrivons les trois équations analogues à la seconde de ces équations, et différentions-les respectivement par rapport à x, y, z ; il vient

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0$$

c'est-à-dire $\frac{d\rho}{dt} = 0$. L'électricité est incompressible ; tous les courants sont fermés.

ρ ne varie pas avec le temps ; si $\rho = 0$ à l'origine, la densité *vraie* de l'électricité est toujours nulle.

On voit en somme que si $\lambda = 0$, le k d'Helmholtz n'entre pas dans les équations. On passe donc à la théorie de Maxwell en faisant $\lambda = 0$ et en laissant k quelconque.

Helmholtz dit dans sa préface qu'on passe à la théorie de Maxwell en faisant $k = 0$. Ce n'est pas exact ; on obtient bien, en faisant $k = 0$, l'équation $J = 0$ (§ 26), mais pour déduire de la formule donnant V_2 la vitesse des ondes transversales telle qu'elle est dans Maxwell, on est obligé d'introduire des hypothèses complémentaires. C'est d'ailleurs ce qu'Helmholtz explique dans le courant de l'ouvrage en complétant ainsi

l'assertion de sa préface qui a cependant trompé quelques personnes [1].

Au contraire, en faisant $\lambda = 0$, cela suffit. Il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas à donner à k une valeur particulière pour faire rentrer la théorie de Maxwell dans celle de Helmholtz : Maxwell ne considère que des courants fermés, k doit donc toujours disparaître des équations.

Nous avons montré seulement jusqu'ici *en quoi consiste* la théorie de Maxwell et comment on peut la faire rentrer dans celle de Helmholtz. Il restera à donner les raisons qui doivent la faire adopter de préférence à toutes les autres.

49. Revenons aux ondes transversales : le courant est dirigé suivant oy et la force magnétique suivant oz ; ces deux perturbations, électrique et magnétique, sont dans le plan de l'onde, mais perpendiculaires entre elles.

La lumière, d'après Maxwell, est une perturbation électromagnétique ; mais on peut supposer que le plan de polarisation de la lumière est perpendiculaire à la vibration électrique et contient la vibration magnétique, ou faire l'hypothèse inverse. La question de la direction de la vibration par rapport au plan de polarisation paraît plus accessible à l'expérience dans le cas de l'électricité que dans le cas de la lumière ; et l'on peut attendre d'expériences électromagné-

[1] Hemlholtz dit en effet que pour passer de sa théorie à celle de Maxwell il convient de faire :

$$k = 0, \quad \varepsilon = \infty, \quad \theta = \infty$$

ce qui avec nos notations revient à faire :

$$k = 0, \quad \lambda = 0, \quad \varkappa = \infty$$

Il n'y a aucune raison pour faire $k = 0$ ni $\varkappa = \infty$; du moment qu'on fait $\lambda = 0$, on retrouve la théorie de Maxwell quels que soient k et $\varkappa$.

tiques des arguments en faveur de l'une des deux hypothèses. Pour Maxwell, la vibration lumineuse est parallèle à la force magnétique ; et celle-ci est dans le plan de polarisation, conformément à l'hypothèse de Neumann et contrairement à celle de Fresnel ; le courant est perpendiculaire au plan de polarisation.

Une remarque encore sur la vitesse de propagation des ondes longitudinales. λ étant différent de o, on pourrait se débarrasser de ces ondes en faisant $k = o$; mais on pourrait arriver au même résultat en faisant k négatif. On aurait alors des rayons évanescents et l'on retomberait sur les idées de Cauchy [1] mais dans ce cas l'équilibre est instable, comme nous l'avons démontré (§ 34).

J'ai exposé d'ailleurs dans la *Théorie mathématique de la Lumière* qu'avec les idées de Cauchy, l'éther serait en équilibre instable.

[1] *Théorie mathématique de la Lumière*, § 47, p. 55

Vol. 72, pag 127.

CHAPITRE VI

L'UNITÉ DE LA FORCE ÉLECTRIQUE

50. Nous avons vu que jusqu'aux récentes expériences de Hertz on n'avait aucun moyen de déterminer expérimentalement λ. Quelles raisons y avait-il alors de préférer l'électrodynamique de Maxwell? D'abord le fait que v, rapport des unités, est égal à la vitesse de la lumière, s'explique très naturellement dans cette théorie ; il ne serait que l'effet du hasard si λ était différent de zéro.

Mais il y a un autre argument, qui est indiqué dans un mémoire de Hertz (1). Ce savant a mis les équations de Maxwell sous une forme symétrique et très élégante.

Considérons les équations du n° 48 qui donnent les

(1) Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Electrodynamik. — *Wied. Ann.*, 23, p. 84 (1884).

composantes du déplacement électrique :

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi f}{K} = -\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{dF}{dt} \\ \dfrac{4\pi g}{K} = -\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{dG}{dt} \\ \dfrac{4\pi h}{K} = -\dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{dH}{dt} \end{cases}$$

Heft. M. p. 21. (*.)

Différentions la seconde par rapport à z, la troisième par rapport à y, et retranchons :

$$(1) \qquad \frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right) = -\frac{d^2H}{dydt} + \frac{d^2G}{dzdt} = -\frac{da}{dt}$$

On a deux équations analogues.

D'autre part, les équations donnant les composantes du courant en fonction de l'induction magnétique peuvent s'écrire :

$$(2) \qquad \begin{cases} 4\pi \dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{dc}{dy} - \dfrac{db}{dz}\right) \\ 4\pi \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{da}{dz} - \dfrac{dc}{dx}\right) \\ 4\pi \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{db}{dx} - \dfrac{da}{dy}\right) \end{cases}$$

p. 111.
Vgl. Heft III. p. 0.

Je puis écrire l'équation (1) et la première des équations (2)

$$\begin{cases} (3) \qquad \dfrac{da}{dt} = -\dfrac{4\pi}{K}\left(\dfrac{dh}{dy} - \dfrac{dg}{dz}\right) \\ (4) \qquad \dfrac{df}{dt} = +\dfrac{1}{4\pi\mu}\left(\dfrac{dc}{dy} - \dfrac{db}{dz}\right). \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{cases}
\dfrac{df}{dx} + \dfrac{dg}{dy} + \dfrac{dh}{dz} = 0 & (5) \\[2ex]
\dfrac{da}{dx} + \dfrac{db}{dy} + \dfrac{dc}{dz} = 0. & (6)
\end{cases}
$$

Les équations (4) et (6) se déduisent des équations (3) et (5) en permutant f, g, h, et a, b, c, en permutant en même temps $-\frac{4\pi}{K}$ et $\frac{1}{4\pi\mu}$. C'est là une correspondance remarquable entre le déplacement électrique et la force magnétique [1].

51. Cette réciprocité, mise en évidence par Hertz, peut s'énoncer sous une force indiquée par M. Blondlot [2].

Soit une masse électrique qui se déplace : les expériences de Rowland prouvent qu'un tel déplacement produit les effets électrodynamiques d'un courant : on crée donc un champ magnétique. Considérons d'autre part un pôle magnétique mobile ; s'il se déplace dans le voisinage de conducteurs il donne naissance à des effets d'induction ; dans la pensée de Maxwell le déplacement de ce pôle dans un diélectrique produit aussi dans le diélectrique des forces électromotrices d'induction : la seule différence est que dans le diélectrique

(1) La symétrie est encore plus évidente, si on considère avec Hertz, la *force magnétique* et la *force électrique*, et si l'on adopte le système d'unités de Hertz qui tient le milieu entre les deux système usuels, électrostatique et électromagnétique. Les équations (3) et (4) s'écrivent alors :

$$
\frac{1}{v}\frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)
$$

$$
\frac{1}{v}\frac{dX}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}
$$

(2) *Journal de physique*, 2e série, IX, p. 177.

ces forces électromotrices donnent lieu à un déplacement électrique au lieu de produire un courant de conduction ; le mouvement du pôle magnétique crée donc un champ électrique. On peut énoncer la réciprocité entre les phénomènes électriques et magnétiques, en disant que si les deux pôles, l'un électrique, l'autre magnétique, subissent le même déplacement, ils donnent naissance au même champ.

Un courant électrique produit les mêmes actions électromagnétiques que le déplacement de l'électricité par convection : on pourra par contre réaliser des *courants magnétiques* donnant les mêmes effets que le mouvement d'un pôle magnétique. Si le magnétisme d'un aimant AB va en diminuant, tout se passera comme si du fluide austral était transporté de son pôle austral A à son pôle boréal B. Les composantes du courant électrique étaient précédemment les dérivées des composantes de la polarisation diélectrique :

$$u = \frac{df}{dt}, \qquad v = \frac{dg}{dt}, \qquad w = \frac{dh}{dt};$$

de même ici, les composantes du courant magnétique seront les dérivées des composantes de la polarisation magnétique A, B, C ; elles seront donc $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$.

Cet aimant dont le magnétisme diminue est donc assimilable à un solénoïde non fermé parcouru par un courant électrique, dont l'intensité irait en diminuant.

52. Soit maintenant un solénoïde fermé dont le courant électrique va en diminuant ; il équivaut à un courant magnétique fermé. D'autre part un courant électrique fermé équivaudrait

à un feuillet magnétique ; un courant magnétique fermé équivaudrait de même à une double couche d'électricité distribuée sur une surface limitée à son contour, c'est-à-dire à un *feuillet électrique*.

Ainsi un solénoïde fermé parcouru par un courant variable produira le champ électrostatique que donnerait un courant magnétique fermé ou un feuillet électrique ; vérifions-le par un calcul direct. Le potentiel dû à un système *d'éléments électriques*, formés chacun de deux masses d'électricités positive et négative égales en valeur absolue, est donné par :

$$\int \frac{\mu}{\lambda} d\tau \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

$\mu d\tau$ étant le moment électrique de l'élément, et l', m', n' les cosinus directeurs de la direction de la polarisation au point (x', y', z'). Un feuillet électrique n'est autre chose par définition qu'un système d'éléments électriques orientés normalement à la surface du feuillet. A chacun des éléments de cette surface correspond ainsi un élément électrique. Dans un feuillet, il y a une infinité d'éléments superficiels : le moment d'un élément est $\Pi d\omega'$, $d\omega'$ étant l'aire de l'élément et Π un nombre constant définissant la puissance du feuillet.

$$(7) \quad \varphi = \frac{\Pi}{\lambda} \int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\omega'$$

$l'm'n'$ désignant ici les cosinus de la normale à l'élément $d\omega'$.

53. Si on a un solénoïde fermé ayant pour directrice le

contour du feuillet, la composante dF du potentiel vecteur dû à l'un des éléments particulaires, de surface $d\omega_1$, est, ainsi que nous l'avons vu au § 37, p. 77 :

$$dF = id\omega_1\left(m_1\frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n_1\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)$$

l_1, m_1, n_1 sont les cosinus de la normale à l'élément $d\omega_1$, c'est-à-dire de la tangente à la courbe directrice du solénoïde au point (x', y', z').

On a donc

$$l_1 = \frac{dx'}{\varepsilon}, \qquad m_1 = \frac{dy'}{\varepsilon}, \qquad n_1 = \frac{dz'}{\varepsilon}$$

ε étant la distance qui sépare deux courants élémentaires du solénoïde. Si on désigne par η l'aire $d\omega_1$ embrassée par le courant élémentaire, on a :

$$dF = \frac{i\eta}{\varepsilon}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}dy' - \frac{d\frac{1}{r}}{dy'}dz'\right)$$

$\frac{\eta}{\varepsilon}$ est une constante ; car dans la définition ordinaire des solénoïdes on admet que η et ε sont deux constantes. En intégrant, on a, pour le solénoïde total :

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon}\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}dy' - \frac{d\frac{1}{r}}{dy'}dz'\right)$$

l'intégrale étant prise le long du contour fermé.

On peut la transformer en une intégrale de surface étendue

à l'aire limitée à ce contour fermé. Elle devient :

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon}\int d\omega'\left[l'\left(-\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy'^2}-\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz'^2}\right)+m'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy'dx'}+n'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx'dz'}\right]$$

et comme $\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy'^2} = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}$, r étant fonction de $y - y'$:

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon}\int d\omega'\left[l'\left(-\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}-\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right)+m'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}+n'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\right]$$

$$(8) \qquad F = \frac{i\eta}{\varepsilon}\int d\omega'\left(l'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+m'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}+n'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\right),$$

car $\Delta\frac{1}{r} = 0$. La force électromotrice d'induction due aux variations d'intensité du solénoïde a sa première composante égale à $-\frac{dF}{dt}$; l'intensité variant seule et le solénoïde ne bougeant pas, l'intégrale du second membre est une constante ; et on a :

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{F}{i}$$

54. Le feuillet donnant un potentiel φ, la composante de la force électrique parallèle à Ox sera, au signe près :

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{H}{\lambda}\int\left(l'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+m'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}+n'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\right)d\omega'$$

C'est l'intégrale de l'équation (8). En comparant (8) et (9), on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Pi\varepsilon}{\lambda\eta} \cdot \frac{F}{i} = \frac{\Pi\varepsilon}{\lambda\eta}\left(\frac{dF}{dt} : \frac{di}{dt}\right)$$

ou :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{di}{dt} \cdot \frac{\lambda\eta}{\Pi\varepsilon} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Le feuillet électrique produit une force électromotrice $\left(-\frac{d\varphi}{dx}, -\frac{d\varphi}{dy}, -\frac{d\varphi}{dz}\right)$; le solénoïde fermé variable une force électromotrice $\left(-\frac{dF}{dt}, -\frac{dG}{dt}, -\frac{dH}{dt}\right)$; les champs électrostatiques produits ne diffèrent que par un facteur constant; et s'il est égal à 1 les champs sont identiques. Il faut pour cela que la puissance Π du feuillet satisfasse à la relation

$$\Pi = \frac{\lambda\eta}{\varepsilon}\frac{di}{dt}$$

Nous supposerons que i est variable, mais $\frac{di}{dt}$ constant : le champ produit ne changera pas avec le temps; on aura $\frac{dF}{dt}$ constant, et de même

$$f = -\frac{4\pi}{K-\lambda} \cdot \frac{dF}{dt}$$

Alors $\frac{df}{dt} = 0$; il n'y a pas de courant de déplacement : au contraire si $\frac{d^2i}{dt^2}$ n'était pas nul, il y aurait courant de déplacement et les phénomènes seraient notablement plus compliqués.

Pour un solénoïde fermé, $Fdx + Gdy + Hdz$ est une différentielle exacte ; l'action magnétique doit donc être nulle, car on a :

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \text{ etc.}$$

La force électromotrice étant la dérivée par rapport au temps de $\int(Fdx + Gdy + Hdz)$, est $\frac{d}{dt}\int(Fdx + Gdy + Hdz)$, ce qui est nul pour un courant fermé.

L'action inductrice d'un solénoïde fermé variable sur un courant *fermé* est donc nulle, mais ce n'est pas une raison pour que cette action sur un courant *ouvert* soit encore nulle et par conséquent pour que ce solénoïde ne produise pas un champ électrique.

55. La considération de pareils solénoïdes fermés variables, équivalents à des feuillets, va nous permettre de décider entre les diverses théories électrodynamiques, en nous fondant sur une hypothèse à laquelle Hertz a donné le nom de « principe de l'unité de la force électrique ».

Ce principe doit être rapproché d'un autre qui est admis par tout le monde et qu'on peut appeler le « principe de l'unité de force magnétique ». La force magnétique en un point étant donnée en grandeur et en direction, son origine importe peu ; la connaissance du champ magnétique suffit à déterminer ce qui s'y passe, indépendamment de la cause qui le produit. On sait que l'action d'un courant électrique fermé peut se remplacer par celle d'un feuillet magnétique équivalent ; si on remplace deux feuillets par deux courants respectivement équivalents au point de vue des actions qu'ils exercent,

l'équivalence subsistera au point de vue des actions qu'ils subissent dans un champ magnétique et par suite les deux courants exerceront l'un sur l'autre exactement la même action que les deux feuillets.

Ce principe pourra paraître trop évident pour qu'il soit utile de l'énoncer. « Puisque chaque courant agit comme l'un des feuillets sur l'autre feuillet, dira-t-on, n'est-il pas de toute évidence que leur action réciproque sera la même que celle des deux feuillets? » Aux personnes qui seraient tentées de raisonner ainsi, je rappellerai seulement l'anecdote des clefs d'Arago, si spirituellement racontée par M. Bertrand dans la préface de sa *Thermodynamique*.

Nous admettrons pour l'électricité un principe analogue à celui que tout le monde admet pour le magnétisme. Un aimant en forme d'anneau dont le magnétisme varie, ou, ce qui revient au même, un solénoïde fermé parcouru par un courant variable, équivaut à un feuillet électrique de puissance convenable, au point de vue du champ électrique auquel il donne naissance. Il agira donc comme ce feuillet sur un autre feuillet électrique; et, en vertu du principe de l'action et de la réaction, subira de la part de ce second feuillet une réaction égale et contraire à l'action exercée. Ainsi un solénoïde fermé variable éprouve dans un champ électrique une action mécanique; et comme un pareil solénoïde crée un champ électrique, deux solénoïdes fermés variables exercent l'un sur l'autre une action mécanique identique à celle qu'exercent deux feuillets électriques équivalents. Tel est le principe de l' « unité de force électrique ».

Or de toutes les théories électrodynamiques, — celles dans lesquelles on avait $\lambda = K_0$ pouvoir inducteur spécifique du

vide (ou de l'air), celle de Maxwell où l'on a $\lambda = 0$, et les théories nouvelles qui consisteraient à donner à λ des valeurs intermédiaires, — la théorie de Maxwell s'accorde seule avec le principe de l'unité de force électrique. Dans l'ancienne électrodynamique, l'action réciproque de deux solénoïdes fermés est en effet toujours nulle, que les solénoïdes soient parcourus par des courants constants ou variables. Dans les nouvelles théories où λ serait intermédiaire entre 0 et K_0, on aurait, pour l'action réciproque de deux solénoïdes fermés variables, un coefficient différent de celui qui affecte l'action de deux feuillets électriques respectivement équivalents.

56. Calculons le travail produit dans le déplacement relatif de deux feuillets : le travail τ est la variation dU de l'énergie électrostatique. De même, cherchons le travail produit dans le déplacement de deux solénoïdes : ils sont parcourus par des courants i et i', alimentés par des piles de forces électromotrices E et E' et passant dans des résistances R et R' ; la variation de l'énergie se compose de la variation dT de l'énergie électrocinétique, plus la variation dU' de l'énergie électrostatique. On a donc :

$$\tau' + Eidt + E'i'dt - Ri^2dt - R'i'^2dt = dT + dU'$$

$$T = \frac{1}{2}(Li^2 + 2Mii' + Ni'^2) \quad \text{et ici} \quad = \frac{1}{2}(Li^2 + Ni'^2)$$

Car $M = 0$, puisqu'un solénoïde fermé ne produit aucune action sur un courant fermé extérieur.

La loi de Ohm donne

$$\begin{cases} E - Ri = \dfrac{d(Li)}{dt} \\ E' - R'i' = \dfrac{d(Ni')}{dt} \end{cases}$$

Nous supposons que les solénoïdes *se déplacent sans se déformer*. Alors $dT = Lidi + Ni'di'$

$$\tau' + Lidi + Ni'di' = Lidi + Ni'di' + dU'$$
$$\tau' = dU'$$

Le travail effectué est égal à la variation de l'énergie électrostatique.

Comparons U et U'. On a, en général (p. 98) (§ 43)

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau + \frac{2\pi}{K-\lambda}\int(f^2+g^2+h^2)d\tau$$

D'autre part,

$$f = -\frac{K-\lambda}{4\pi}\left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

Donc

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int \varepsilon^2 d\tau + \frac{K-\lambda}{8\pi}\int \zeta^2 d\tau$$

en posant :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

ε est la force électromotrice électrostatique ; et

$$\zeta^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dH}{dt}\right)^2$$

ζ est la force électromotrice *totale* (force électromotrice électrostatique + force d'induction).

Dans le premier cas, deux feuillets : $\varepsilon = \zeta$

$$U = \frac{K}{8\pi}\int \zeta^2 d\tau$$

Dans le second cas, pas de force électromotrice autre que celle d'induction :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 ; \ \varepsilon = 0.$$

Les solénoïdes sont supposés équivalents aux feuillets, c'est-à-dire que la valeur de la force électromotrice totale ζ en un point est la même dans ce second cas que dans le premier.

$$U' = \frac{K - \lambda}{8\pi}\int \zeta^2 d\tau$$

$$\frac{U}{U'} = \frac{K}{K - \lambda} \qquad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{dU}{dU'} = \frac{K}{K - \lambda}$$

Si le principe adopté est vrai, c'est-à-dire si les deux solénoïdes exercent l'un sur l'autre la même action que les deux feuillets équivalents, on doit avoir $\tau = \tau'$; donc il faut que $dU = dU'$, par suite que $\lambda = 0$. *La théorie de Maxwell est donc seule compatible avec le principe de l'unité de la force électrique.*

Un autre cas intéressant à examiner, mais plus compliqué, serait celui où l'on aurait un solénoïde variable et un feuillet.

Pour calculer le travail dû à l'action mutuelle de ce solénoïde et de ce feuillet, on peut encore appliquer le principe de la conservation de l'énergie ; mais le calcul est beaucoup plus délicat que dans les deux cas que nous venons de traiter ; il faut tenir compte en effet de l'action électrodynamique des

courants de convection dus au déplacement des masses électriques qui constituent le feuillet. (voir chapitre XII, note 1.)

Dans les idées de Hertz, outre l'action électrodynamique qui s'exerce entre deux courants, il existe donc entre ces courants, dans le cas où ils sont variables, une action électrostatique. Il n'est peut-être pas impossible de mettre cette action en évidence par l'expérience. Ne peut-on pas interpréter de la sorte les curieuses expériences d'Elihu Thomson? Dans la masse conductrice se produisent des courants d'induction sous l'influence du champ alternatif auquel elle est soumise; on peut supposer dans les idées de Hertz qu'il y a action électrostatique directe du courant alternatif inducteur sur les courants variables, fermés ou non, développés par induction dans la masse conductrice.

CHAPITRE VII

DESCRIPTION SUCCINCTE DES EXPÉRIENCES DE M. HERTZ [1]

57. La diffusion des idées de Maxwell a eu la plus heureuse influence sur les progrès de la science. Elle a suscité un grand nombre de recherches dans le but de vérifier les théories du savant anglais et, plus particulièrement, la théorie électromagnétique de la lumière, l'une des plus hardies conceptions de son puissant génie.

Mais jusqu'à ces dernières années les vérifications portaient exclusivement sur des points bien éloignés des hypothèses fondamentales et il eût été bien téméraire d'affirmer la possibilité de la production de la lumière au moyen des perturbations électriques. Ce n'est qu'en 1888 que M. Hertz, en produisant des perturbations d'une période de quelques cent millionièmes de secondes, en a rendu vraisemblable la réalisation. De plus, il a ouvert aux chercheurs un nouveau champ d'investigations leur permettant d'aborder des vérifications directes de la théorie électromagnétique de la lumière. On

[1] Ce chapitre est entièrement l'œuvre personnelle de M. Blondin.

ne peut dire si les tentatives récentes faites dans ce but confirment ou non la théorie dans tous ses détails, la précision des mesures laissant encore beaucoup à désirer. En tout cas les expériences de M. Hertz, en démontrant l'identité du mode de propagation de la lumière et des perturbations électriques, sont une confirmation éclatante de l'hypothèse qui sert de base à la théorie.

58. Description des appareils. — L'appareil employé par M. Hertz pour produire des perturbations de très courte durée

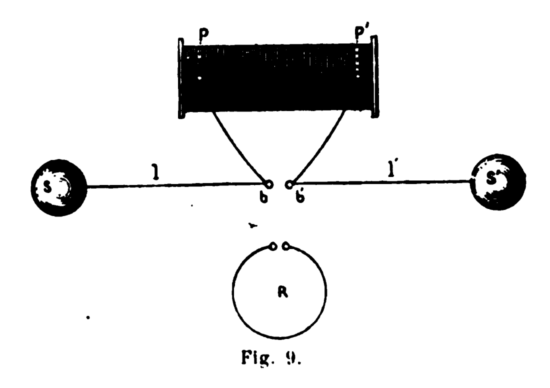


Fig. 9.

a reçu le nom *d'excitateur*. Il se compose d'une forte bobine de Ruhmkorff dont les pôles P et P' (*fig.* 9) sont reliés à deux tiges de cuivre horizontales l et l' de $0^{cm},5$ de diamètre. Les deux extrémités en regard de ces tiges sont terminées par deux boules de laiton parfaitement poli b et b' de 3 centimètres de diamètre, et laissant entre elles un intervalle de $0^{cm},75$ environ. Aux deux autres extrémités se trouvent deux sphères de zinc de 30 centimètres de diamètre ; la distance de leurs centres, qu'on peut varier à volonté, est d'environ 1 mètre.

Pour la commodité de certaines expériences M. Hertz a un

peu modifié ce dispositif. Dans quelques-unes il a remplacé les deux sphères par deux plaques de laiton carrées de 40 centimètres de côté et disposées, tantôt horizontalement, tantôt verticalement, suivant l'axe des tiges *l* et *l'*; la distance des centres de ces plaques est encore d'environ 1 mètre. Enfin dans d'autres expériences les pôles de la bobine sont simplement reliés à deux cylindres de laiton de 13 centimètres de longueur et de 3 centimètres de diamètre ; les deux parties en regard sont terminées par des surfaces sphériques de 2 centimètres de rayon.

59. Le fonctionnement de l'excitateur est assez complexe. Supposons d'abord les sphères séparées de la bobine et portées à des potentiels différents. Si la différence de ces potentiels est suffisante pour donner lieu à une étincelle entre les boules *b* et *b'* les sphères se déchargent et si les valeurs de la résistance R, de la self-induction L et de la capacité C satisfont à l'inégalité

$$R < \frac{4L}{C};$$

cette décharge est oscillatoire. Cette condition se trouvant remplie par suite des dimensions données à l'appareil, il se produit une série d'oscillations et, par conséquent, des perturbations électriques dont la période est, d'après la formule de sir W. Thomson,

$$2\pi\sqrt{LC}.$$

Les valeurs de L et C en unités électromagnétiques étant très petites, cette période est de l'ordre des cent millioniémes de seconde. Elle est même encore environ dix fois plus petite avec la dernière modification décrite.

Mais la durée de cette décharge oscillatoire est excessivement courte ; il faut donc, pour rendre le phénomène observable, charger les sphères à des intervalles de temps très rapprochés. C'est alors qu'intervient le rôle de la bobine. Le courant d'induction produit par cet appareil est lui-même oscillatoire et, d'après les expériences de M. Bernstein et de M. Mouton, sa période est de l'ordre des cent millièmes de seconde. Par conséquent en reliant les sphères aux pôles de la bobine, ces sphères se trouvent chargées environ cent mille fois par seconde.

60. Si on place dans le voisinage de l'excitateur un circuit presque fermé présentant entre ses extrémités un intervalle d'une fraction de millimètre, on voit généralement un flux d'étincelles jaillir à la coupure. Mais pour une même position du circuit la longueur et l'éclat des étincelles varient avec sa forme et ses dimensions; pour chaque forme, la forme circulaire par exemple, il existe une dimension pour laquelle l'étincelle présente un maximum très marqué. Un fait du même genre se rencontre en acoustique : un résonnateur sphérique n'entre en vibration sous l'influence d'un son de période donnée que si son rayon a une valeur convenable. De là le nom de *résonnateur* qui a été donné au circuit secondaire dans lequel l'excitateur produit des étincelles; on dit qu'il est à *l'unisson* de l'excitateur quand sa forme et ses dimensions sont celles qui répondent au maximum de l'étincelle.

Dans les premières recherches de M. Hertz le résonnateur est un fil de $0^{cm},2$ de diamètre plié en carré de 60 centimètres de côté ; un micromètre à étincelles placé à la coupure permet de mesurer la longueur des étincelles avec la dernière préci-

sion. Grâce aux dimensions choisies le résonnateur est presque à l'unisson avec l'excitateur ; on achève le réglage au moyen de deux petites lames métalliques soudées aux extrémités du résonnateur et dont on agrandit ou diminue la surface, de façon à faire varier la capacité, jusqu'à ce qu'on obtienne une longueur d'étincelles maximum.

Dans la plupart de ses expériences ultérieures M. Hertz a adopté la forme circulaire. Pour l'excitateur à sphères ou à plaques le résonnateur à l'unisson R (*fig.* 10) est un fil de $0^{cm},2$ de diamètre formant un cercle de 35 centimètres de diamètre. Avec la dernière modification de l'excitateur, pour laquelle les vibrations ont une plus courte durée, le fil du résonnateur n'a que $0^{cm},1$ de diamètre et le diamètre du cercle qu'il forme n'est que de $7^{cm},5$. Avec ce même excitateur M. Hertz a encore employé un résonnateur disposé comme il suit : deux fils rectilignes de $0^{cm},5$ de diamètre et de 30 centimètres de longueur sont placés dans le prolongement l'un de l'autre avec une distance de 5 centimètres entre leurs extrémités en regard ; de ces deux extrémités partent deux fils de $0^{cm},1$ de diamètre et de 15 centimètres de longueur, perpendiculaires aux premiers et parallèles entre eux et qui se terminent par un micromètre à étincelles.

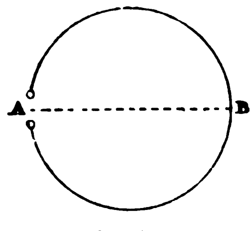


Fig. 10.

61. Exploration du champ produit par l'excitateur. — Par suite de la symétrie de l'excitateur par rapport à la droite qui joint les centres des deux sphères les phénomènes doivent être les mêmes dans tous les plans qui passent

par cet axe ; il suffit donc d'explorer la moitié de l'un de ces plans, le plan horizontal pour plus de commodité. Mais le plan vertical mené par le milieu de l'excitateur est un plan de symétrie de cet appareil ; l'intersection de ce plan avec le plan horizontal est donc un axe de symétrie que M. Hertz appelle la *base*, pour les phénomènes qui se produisent dans ce dernier plan. Par suite l'exploration se trouve réduite au quadrant du plan horizontal compris entre l'axe de l'excitateur et la base.

M. Hertz emploie dans ce but le résonnateur circulaire de 35 centimètres de rayon ; un support convenablement disposé permet de lui faire prendre une position quelconque, son centre étant toujours maintenu dans le plan horizontal passant par l'axe de l'excitateur. Les résultats qu'il a obtenus peuvent être résumés ainsi qu'il suit :

1° Le plan du résonnateur étant vertical, si on fait tourner cet appareil autour de son centre de manière à ce que le diamètre passant par la coupure, que nous appellerons *axe de symétrie* du résonnateur, décrive une révolution complète, les étincelles varient de longueur ; elles présentent des longueurs maxima, égales entre elles dans les deux positions pour lesquelles l'axe de symétrie est vertical, elles cessent de se produire quand cet axe est horizontal ; dans les positions intermédiaires leur longueur est d'autant plus grande que l'axe de symétrie est plus près d'être vertical ;

2° La longueur des étincelles au moment où elles atteignent leur maximum dépend, pour une même position du centre du résonnateur, de l'azimut du plan de cet appareil. On le montre en faisant tourner le résonnateur autour de son axe de symétrie maintenu verticalement ; on constate que, pour une révo-

lution complète, les étincelles passent deux fois par un maximum et deux fois par un minimum. Les azimuts pour lesquels se produisent les maxima diffèrent de 180° ; il en est de même de ceux auxquels répondent les minima ; de plus la différence d'azimut pour un maximum et un minimum est de 90° ;

3° La position dans l'espace du résonnateur quand les étincelles passent par un maximum ou passent par un minimum dépend de la position du centre de cet appareil par rapport à l'excitateur.

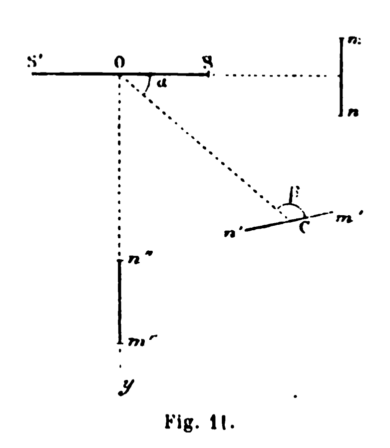


Fig. 11.

Si nous désignons par α l'angle que forme l'axe SS' (*fig.* 11) de l'excitateur avec la droite OC qui joint le milieu de cet axe et le centre du résonnateur et par β l'angle du plan de ce dernier appareil, au moment d'un minimum, avec la droite OC, la valeur de β croît de 90° à 180° quand l'angle α croît de 0° à 90° pourvu que la distance OC soit inférieure à 3 mètres. Pour des distances plus considérables les positions du résonnateur sont sensiblement parallèles entre elles et perpendiculaires à SS'. Mais quelle que soit la distance les minima sont nuls quand le centre du résonnateur se trouve sur la base O*y* et que son plan passe par cette ligne ;

4° Lorsque le plan du résonnateur est horizontal la longueur des étincelles dépend aussi de la position de l'axe de symétrie. La figure 12 montre en a_1, a'_1, a_2... les positions

de la coupure auxquelles correspondent les longueurs maxima, et en b_1, b'_1, b_2... ceux auxquelles correspondent les longueurs minima. On voit qu'en passant de la position I à la position III de l'excitateur, les positions de la coupure relative aux minima se rapprochent l'une de l'autre tout en comprenant entre elles la position relative à un maximum. Dans la position III ces trois positions de la coupure se confondent et l'on n'observe plus qu'un maximum en a_3';

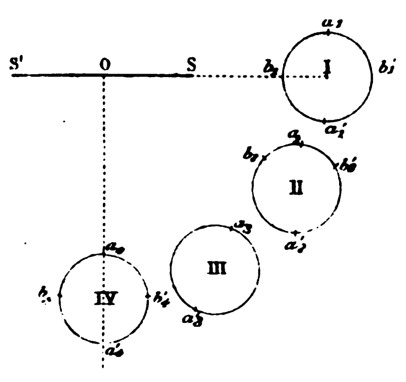


Fig. 12.

5° Il existe à une distance d'environ 3 mètres de l'excitateur une série de points, formant une zone fermée, pour lesquels on ne peut constater ni maximum ni minimum dans la longueur des étincelles, quelles que soient les positions du plan du résonnateur et de son axe de symétrie.

Ce dernier résultat a une grande importance théorique ; M. Hertz, au moyen de considérations que nous n'avons pas à exposer ici, a démontré que les actions électriques se propagent dans l'air avec une vitesse finie.

62. Modification du champ par les diélectriques. — Mais les résultats que nous venons d'exposer supposent l'excitateur placé dans un espace indéfini, ou tout au moins, ainsi que cela avait lieu dans les expériences de M. Hertz, dans une salle de très grandes dimensions et abso-

lument nue. C'est qu'en effet le champ est profondément modifié par la présence d'objets conducteurs dans le voisinage de l'excitateur.

Cette influence perturbatrice des corps conducteurs, que M. Hertz avait observée dès ses premières expériences, doit évidemment être attribuée à l'action qu'exercent sur le résonnateur les courants induits dans ces conducteurs par l'excitateur. Or, d'après Maxwell, les courants de déplacement qui se produisent dans les diélectriques jouissent, comme les courants de conduction, de la propriété inductive. Il suffisait donc, pour vérifier cette hypothèse, de chercher si un diélectrique placé dans le voisinage de l'excitateur a une influence perturbatrice analogue à celle des conducteurs. C'est ce qu'a fait M. Hertz.

La seule difficulté des expériences résultait de la nécessité d'employer une masse considérable de matière diélectrique. M. Hertz a d'abord opéré avec du papier. Dans ce but il disposa un tas de livres formant un parallélépipède rectangle de $1^m,5$ de long, $0^m,5$ de large et de 1 mètre de hauteur sur lequel il plaça l'excitateur à plaques horizontales. Il constata que les maxima et minima des étincelles ne correspondaient plus aux mêmes positions du plan de l'excitateur et de son axe de symétrie que dans les expériences précédentes. En particulier, si on place verticalement le plan de l'excitateur, on obtient des étincelles lorsque l'axe de symétrie est horizontal ; elles prennent une longueur minimum si on fait tourner la coupure vers le bas d'un angle qui, pour certaines positions de l'excitateur, atteint 23°, mais elles ne cessent pas complètement ; les deux maxima correspondent encore à la position verticale de l'axe de symétrie, mais ils

ne sont plus égaux : quand la coupure est en bas les étincelles sont moins longues que lorsqu'elle est en haut.

En remplaçant le papier par un parallélépipède d'asphalte de mêmes dimensions les résultats furent aussi probants. Il en fut de même avec un parallélépipède de poix artificielle.

Mais on pouvait objecter que les effets observés provenaient des matières conductrices disséminées dans les substances impures employées. Aussi M. Hertz répéta-t-il les mêmes expériences en prenant des diélectriques pouvant s'obtenir parfaitement purs comme le soufre, la paraffine, le pétrole. Toutefois, pour éviter l'emploi d'une trop grande quantité de ces substances, il se servit d'un excitateur et d'un résonnateur de dimensions moitié plus petites que celles des appareils employés dans les précédentes expériences. L'observation des étincelles devint beaucoup plus délicate, mais les résultats restèrent aussi concluants. L'action inductive des courants de déplacement se trouvait complètement démontrée.

63. Propagation dans les fils métalliques. — Par une nouvelle série d'expériences, M. Hertz parvient à démontrer un autre point important : la vitesse de propagation des perturbations électriques dans un fil métallique est finie.

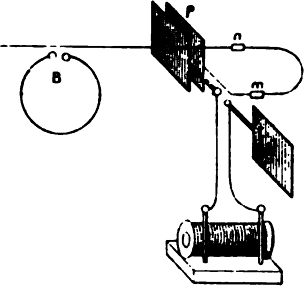


Fig. 13.

Dans ces expériences, M. Hertz employait l'excitateur à plaques verticales (*fig.* 13); derrière l'une d'elles était disposée une plaque P de mêmes dimensions reliée par un fil

mn à un fil isolé, de 12 mètres de longueur, tendu horizontalement dans le plan vertical de symétrie de l'excitateur, à 40 centimètres au-dessus de la base.

Disposons le résonnateur B de façon que, son centre étant sur la base et la coupure au point le plus haut, son plan soit vertical et passe par le fil. Dans ces conditions aucune étincelle ne se produirait si le fil n'existait pas. Or, on constate qu'en général de vives étincelles éclatent à la coupure ; elles sont donc dues uniquement à l'action du fil.

En déplaçant le résonnateur, toujours maintenu dans le même plan, depuis l'extrémité libre du fil jusqu'à l'excitateur, on observe qu'il ne se produit pas d'étincelles près de l'extrémité libre et aux points situés à des distances multiples de $2^m,8$ de cette extrémité. Pour les autres positions il y a production d'étincelles, et la longueur de celles-ci augmente à mesure qu'on s'approche du milieu des intervalles formés par les points précédents. Ces points sont donc analogues aux nœuds d'une corde vibrante, pour cette raison ils ont reçu le même nom. D'ailleurs l'analogie se poursuit, car si on coupe le fil en un nœud les phénomènes restent les mêmes en tout point compris entre l'excitateur et le point de section ; au-delà de ce point la partie coupée continue à être le siège des mêmes phénomènes mais avec une intensité moindre.

Mais cette analogie n'est pas seulement apparente ; elle est réelle si on admet que la vitesse de propagation des perturbations électriques est finie. Les nœuds résultent de l'interférence des ondes directes propagées par le fil avec les ondes réfléchies à son extrémité ; la simplicité de l'explication est une preuve de l'existence d'une vitesse de propagation finie.

On peut même en calculer la valeur si on connaît la

période de la perturbation. M. Hertz admettant que la période est de 1,4, 10^{-8} secondes, une demi-longueur d'onde de $2^{m},1$ correspond à une vitesse de 200,000 kilomètres. Cette valeur est du même ordre que celles qui ont été trouvées par MM. Fiezeau et Gounelle et par M. W. Siemens pour les vitesses de propagation dans les fils de fer et les fils de cuivre.

D'ailleurs la vitesse doit être indépendante de la nature du fil, car M. Hertz a constaté que la distance entre deux nœuds consécutifs reste la même quand on remplace le fil par un autre de diamètre différent ou d'une autre nature.

64. Vitesse de propagation dans l'air. — A la suite de ces expériences M. Hertz étudia les phénomènes produits par un fil infiniment long, pour lequel, par conséquent, il n'y a pas de réflexion des ondes sur elles-mêmes. Ce fil indéfini était réalisé pratiquement en prolongeant le fil des expériences précédentes de 60 mètres au dehors de la salle et en mettant son extrémité en communication avec la terre.

Si nous plaçons les résonnateurs dans le plan vertical passant par le fil, la coupure au point le plus haut et le centre sur la base de l'appareil, l'action du fil se fait seule sentir. Si à partir de cette position nous faisons tourner le résonnateur de 90° autour de son axe vertical, l'action du fil doit être nulle, par raison de symétrie, puisque le résonnateur est alors perpendiculaire au fil ; dans cette position les étincelles sont donc dues uniquement à l'excitateur. L'action du fil et celle de l'excitateur au centre du résonnateur sont par conséquent égales lorsque les étincelles ont la même longueur dans les deux positions rectangulaires que nous venons de considérer; on arrive facilement à réaliser cette condition en écartant ou

rapprochant la plaque P de la plaque A ; supposons qu'elle soit réalisée.

Pour toute position intermédiaire du résonnateur les deux actions se superposent et la longueur des étincelles doit présenter un maximum ou un minimum pour l'une de ces positions. On constate le maximum et le minimum ; le maximum quand la normale au résonnateur est d'un certain côté du plan vertical qui contient le fil, du côté de la plaque A par exemple ; le minimum quand la normale est de l'autre côté, du côté de A'. Les phénomènes dus uniquement à l'excitateur étant symétriques par rapport au plan vertical passant par le fil, ces résultats montrent que ceux qui sont dus à ce fil ne présentent pas la même symétrie.

D'ailleurs ces phénomènes changent avec le point considéré. On constate en effet que si on déplace le résonnateur le long du fil les maxima changent de valeur et ne correspondent plus à un même angle de la normale avec la base ; pour certaines portions du fil les maxima se produisent quand la normale est dirigée vers A ; pour les portions comprises entre les précédentes, ils ont lieu quand la normale est dirigée vers A' ; les maxima ne deviennent égaux que pour les points dont la distance est de $7^m,5$.

Ainsi tous les $7^m,5$ le phénomène reprend la même intensité mais pour une position différente de la normale par rapport à la base. Quelle en est la cause ?

Nous savons que dans le fil la demi-longueur d'onde est égale à $2^m,8$; deux points du fil distants de $2^m,8$ exercent donc des actions différentes. Si la vitesse de propagation des actions de l'excitateur était infinie, le changement de direction de la normale pour les positions correspondant aux maxima serait

uniquement dû au fil et ce changement devrait avoir lieu tous les 2^{m},8. Il en serait encore de même si la vitesse de propagation dans l'air était la même que dans le fil. L'expérience donnant un résultat contraire à ces conclusions nous devons admettre que la vitesse dans l'air est finie et différente de la vitesse dans les métaux. C'est à l'interférence des ondes transmises directement par l'air et des ondes transmises par le fil que doit donc être attribuée la production des phénomènes observes.

On peut en déduire la valeur de la vitesse de propagation dans l'air ; il suffit d'écrire que les interférences changent de signe chaque fois que l'un des mouvements a gagné une demi-longueur d'onde sur l'autre. Si on appelle λ et λ' les demi-longueurs d'onde dans l'air et dans le fil et d la distance trouvée, on doit avoir

$$n\lambda = (n+1)\,\lambda' = d.$$

λ' étant égal à 2^{m},8 et d à 7^{m},5 on en déduit $\lambda =$ 4^{m},5 et, en admettant toujours la même valeur pour la période de vibration, on trouve 320,000 kilomètres pour la vitesse dans l'air. On voit que cette vitesse est sensiblement égale à celle de la lumière; en tous cas elle est du même ordre de grandeur ([1]).

65. Réflexion des ondes. — Les considérations qui précédent pouvant prêter à la critique, M. Hertz a cherché

([1]) D'après une lettre que M. Hertz m'a fait l'honneur de m'écrire, l'éminent physicien ne considère plus aujourd'hui comme absolument probantes les expériences décrites dans ce paragraphe. Il a, en effet, regardé les nœuds observés comme produits par l'interférence des ondes transmises par le fil et des ondes transmises directement par l'air. Il faudrait encore tenir compte de l'influence des ondes réfléchies sur les parois de la salle, ondes dont des expériences ultérieures lui ont fait connaître l'existence (H. P.).

une disposition expérimentale mettant immédiatement en évidence la propagation dans l'air avec une vitesse finie. Il y est parvenu en faisant réfléchir les ondes et en faisant interférer les ondes directes avec les ondes réfléchies.

La réflexion était obtenue au moyen d'une feuille de zinc de très grandes dimensions fixée contre un des murs de la salle d'expériences et mise en communication avec le sol. L'excitateur dont l'axe était disposé verticalement était placé à une distance de 13 mètres du miroir métallique.

Si on place le centre du résonnateur sur la normale au miroir passant par le milieu de l'excitateur, ligne que nous appellerons *normale d'incidence*, et si on dispose son plan perpendiculairement à cette normale, on constate qu'au voisinage immédiat de la paroi il ne se produit pas d'étincelles ou du moins des étincelles très faibles, quelle que soit la position de la ligne de symétrie; il en est encore de même à des distances de $4^m,1$ et de $8^m,5$. Pour les distances intermédiaires les étincelles ont une longueur maximum quand l'axe de symétrie est horizontal.

Si nous maintenons cet axe dans cette position et si nous déplaçons l'excitateur parallèlement à lui-même, son centre restant sur la normale d'incidence, à partir du miroir, on observe que les étincelles d'abord très petites augmentent de longueur et présentent un maximum à une distance de $1^m,72$; elles décroissent ensuite, deviennent nulles à $4^m,10$, puis croissent et passent par un nouveau maximum quand la distance atteint $6^m,30$ environ. Les mêmes phénomènes se reproduisent donc en des points distants de $4^m,5$ environ.

Plaçons maintenant le résonnateur dans le plan vertical passant par la normale d'incidence et mettons l'axe de

symétrie parallèlement à cette normale ; généralement les étincelles n'ont pas la même longueur suivant que la coupure est dirigée du côté du miroir ou du côté de l'excitateur. Si on déplace le résonnateur parallèlement à lui-même les plus longues étincelles se produisent quand la coupure est du côté du miroir, tant que la distance à celui-ci est inférieure à 1^{m},72 ; pour une distance comprise entre 1^{m},72 et 4^{m},10 le maximum a lieu du côté dirigé vers le miroir; un nouveau changement se produit à la distance de 6^{m},30 environ, les phénomènes se reproduisent encore tous les 4^{m},5 à peu près.

Il semble donc, d'après ces résultats, que la longueur d'onde dans l'air est égale à 4^{m},50. M. Hertz est parvenu à établir, par diverses considérations sur lesquelles nous n'insisterons pas, que cette longueur doit être prise pour la demi-longueur d'onde ; le nombre trouvé précédemment se trouverait ainsi confirmé. Il convient toutefois de faire remarquer que les valeurs que nous avons citées pour les distances de l'excitateur à la paroi au moment où un phénomène change de sens sont assez mal déterminées et que, par suite, on ne peut avoir grande confiance dans les conséquences numériques qu'en tire M. Hertz ; ce qu'il y a de certain c'est que la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de celle qui résulterait d'une vitesse de propagation égale à celle de la lumière.

66. Rayons de force électrique. – Mais qu'il y ait ou non égalité entre ces vitesses, le mode de propagation par ondes des perturbations électriques ne peut laisser aucun doute. Il est donc permis de considérer des *rayons de force électrique* au même titre que des rayons lumineux et l'on doit s'attendre

à ce que les rayons de force électrique se réfléchissent et se réfractent suivant les mêmes lois que ces derniers. M. Hertz a vérifié cette identité de propriétés.

Les perturbations sont produites avec l'excitateur que nous avons décrit en dernier lieu ; les deux cylindres sont disposés verticalement suivant la ligne focale d'un miroir parabolique en zinc de 2 mètres de hauteur et de 1^{m},2 d'ouverture. Les phénomènes sont étudiés au moyen du résonnateur circulaire de 7^{cm},5 de diamètre ou mieux du résonnateur rectiligne ; les deux tiges verticales de ce résonnateur sont placées suivant la ligne focale d'un miroir parabolique de mêmes dimensions que le précédent et les deux fils horizontaux qui y sont fixés traversent le miroir ; de cette manière le micromètre à étincelles se trouve derrière le miroir et son observation se fait commodément.

Propagation rectiligne. — Les rayons réfléchis par le miroir parabolique de l'excitateur se propagent très sensiblement en ligne droite. Diverses expériences le prouvent.

En premier lieu on constate que l'étincelle du résonnateur devient très faible dès que le plan de symétrie de son miroir ne coïncide pas avec le plan de symétrie de l'autre miroir.

Si on fait coïncider ces deux plans et qu'on interpose entre les miroirs une feuille de zinc de 2 mètres de haut sur 1 mètre de large l'étincelle disparaît. Elle disparaît également quand un aide se place entre les miroirs. L'interposition d'une matière isolante, une planche de bois par exemple, ne produit aucun effet.

Polarisation. — Par suite de la forme de l'excitateur les vibrations du rayon de force électrique s'effectuent dans un plan passant par le rayon. Ce rayon est donc analogue à

un rayon lumineux polarisé rectilignement ; il jouit de propriétés semblables.

Si on fait tourner le miroir récepteur autour d'un axe horizontal on voit les étincelles diminuer de longueur et disparaître quand les plans de symétrie sont à angle droit ; un fait semblable se produit quand un rayon lumineux complètement polarisé par réflexion sur un miroir plan tombe sur un second miroir ; il y a extinction quand les deux plans d'incidence sont rectangulaires.

Remettons les plans de symétrie des miroirs en coïncidence et interposons un cadre en bois sur lequel sont tendus des fils métalliques parallèles. Si ces fils sont perpendiculaires aux lignes focales les étincelles ne varient pas de longueur ; si elles leur sont parallèles les étincelles cessent de se produire ; pour une position intermédiaire les étincelles reparaissent mais sont plus courtes que si le cadre était enlevé. Ce cadre agit donc sur le rayon électrique de la même manière qu'une tourmaline sur un rayon lumineux polarisé rectilignement.

Réflexion. — Ayant placé les deux miroirs paraboliques côte à côte de manière que leurs plans de symétrie se coupent à 3 mètres de distance environ. M. Hertz dispose suivant la ligne d'intersection un miroir vertical en zinc dont le plan est perpendiculaire au plan bissecteur. Les étincelles se produisent alors dans le résonnateur ; elles disparaissent si on fait tourner le plan réflecteur autour d'un axe vertical d'un angle d'une quinzaine de degrés. Les lois de la réflexion de la lumière sont donc applicables aux ondes électriques. Diverses autres expériences faites dans des conditions différentes confirment cette identité de propriétés.

Réfraction. — Pour s'assurer que les ondes électriques se

réfractent, M. Hertz s'est servi d'un grand prisme d'asphalte de 1^{m},50 de hauteur et dont l'angle était de 30°. Ce prisme était placé à 2^{m},6 de l'excitateur. Le résonnateur placé de l'autre côté donnait des étincelles de longueur maximum quand l'angle de son plan de symétrie avec celui de l'excitateur atteignait 22° Elles disparaissaient quand on interposait un écran métallique sur le trajet du rayon, soit avant, soit après le prisme; la transmission s'effectuait donc bien à travers le prisme.

67. Expériences de MM. Sarasin et de la Rive. — Pendant que M. Hertz entreprenait de nouvelles expériences, les expériences fondamentales que nous venons d'exposer étaient répétées par un grand nombre de savants.

Ces nombreuses recherches amenèrent la découverte de faits intéressants ; ainsi on reconnut que les tubes de Geissler pouvaient servir de résonateurs; M. Lodge parvint à concentrer les actions électriques suivant la ligne focale d'une lentille cylindrique aplatie. Mais ces résultats sont d'ordre secondaire. Il en est tout autrement de celui qui a été annoncé, en janvier dernier, par MM. Sarasin et de la Rive.

En répétant les expériences de M. Hertz sur les fils conducteurs non isolés à leurs extrémités, ces physiciens ont reconnu que la position des nœuds pouvait être constatée à l'aide de résonateurs de dimensions différentes. Pour chaque résonnateur la distance des nœuds est la même tout le long des fils, sauf à l'extrémité où l'on trouve une perturbation analogue à celle que présentent les tuyaux sonores ; mais cette distance est différente suivant le résonateur employé, elle augmente avec les dimensions de cet appareil.

L'importance de ce résultat est évidente. Si la longueur d'onde $\lambda = VT$ dépend du résonateur employé, l'un des facteurs V ou T doit varier. Admettre que la vitesse V de propagation dépende du procédé d'observation est évidemment absurde ; il faut donc admettre que c'est la période de la vibration T qui varie. C'est à cette hypothèse que MM. Sarazin et de la Rive se rallient. Ils admettent que le système ondulatoire produit par l'excitateur contient toutes les longueurs d'onde possibles entre certaines limites et que chaque résonateur choisit dans cet ensemble complexe l'ondulation dont la période correspond à la sienne propre.

De cette conclusion il résulte immédiatement que les valeurs numériques que M. Hertz a déduites de ses expériences pour la vitesse de propagation des perturbations électriques dans l'air et dans les fils n'ont aucune signification puisque ces valeurs dépendent de la position des nœuds et, par suite du résonnateur employé. Toutefois il n'en reste pas moins démontré expérimentalement que la propagation s'effectue par ondes et, nécessairement, avec une vitesse finie qui est du même ordre de grandeur que la vitesse de la lumière. Les expériences de M. Hertz conservent donc une importance considérable et méritent bien l'immense retentissement qu'elles ont eu. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur les divergences de détail signalées plus haut et sur les difficultés que soulèvent les résultats inattendus dé MM. Sarasin et de la Rive (¹).

(¹) Voir la discussion de ces expériences au Chapitre XII.

CHAPITRE VIII

L'EXCITATEUR DE HERTZ

68. Guidé par les considérations théoriques précédemment exposées ([1]), Hertz a institué des expériences destinées à permettre de prononcer entre l'électrodynamique ancienne et celle de Maxwell, et il a réussi à mettre en évidence la propagation des ondes électromagnétiques. Ces expériences ont été décrites dans le chapitre VII ([2]), nous discuterons maintenant les conséquences qu'en a déduites Hertz, ainsi que les objections qu'on peut faire à sa méthode.

69. Nous étudierons d'abord l'appareil au moyen duquel il

([1]) Chap. VI, p. 114-127.

([2]) HERTZ, *Annales de Wiedemann*; t. XXXI, *Ueber sehr Schnelle electrische Schwingungen*, p. 421; t XXXIV, *Ueber die Einwirkungeiner geradlinigen electrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn*, p. 155; t. XXXIV, *Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*, p. 551; t. XXXIV, *Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*, p. 609; t. XXXVI, *Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell schen Theorie*, p. 1; t. XXXVI, *Ueber Strahlen electrischer Kraft*, p. 769.

produit des vibrations électromagnétiques très rapides, son *excitateur*. Il se compose d'un fil de cuivre de 5 millimètres de diamètre, aux extrémités duquel sont soudées deux sphères de zinc de 15 centimètres de rayon, la distance de leurs centres, dans le premier appareil de Hertz, était de 1m,50 ; en son milieu, le fil est interrompu sur une longueur de quelques millimètres, et entre les bornes peuvent éclater des étincelles : ces deux bornes sont reliées aux deux pôles d'une bobine de Ruhmkorff.

Calculons, d'après Hertz, la durée d'une oscillation électrique dans ce système.

Si l'on a un condensateur dont les armatures sont à des potentiels V_1 et V_2, dont la charge est q, et la capacité C, en réunissant les deux armatures par un conducteur de résistance R, on obtiendra dans ce conducteur un courant i ; et si L est le coefficient de self-induction du système, on aura, à chaque instant :

$$(1) \qquad Ri = -L\frac{di}{dt} + V_1 - V_2$$

en même temps que :

$$V_1 - V_2 = -\frac{q}{C}$$

et :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

En éliminant i et $V_1 - V_2$, on obtient l'équation différentielle :

$$(2) \qquad LC\frac{d^2q}{dt^2} + RC\frac{dq}{dt} + q = 0$$

L'équation caractéristique correspondante

$$LCh^2 + RCh + 1 = 0$$

admet pour racines

$$h = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

Les racines sont réelles si

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'intégrale générale de (2) est alors :

$$q = A_1 e^{h_1 t} + A_2 e^{h_2 t}$$

et il n'y a pas d'oscillation.

Au contraire, si $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, les racines sont imaginaires. Posons

$$h = -\alpha \pm i\beta$$

$$-\alpha = -\frac{R}{2L} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC}$$

L'intégrale générale est alors

$$q = Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$$

A et γ étant les deux constantes arbitraires.

La période T du mouvement oscillatoire est donnée par

$$\beta T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

et dans le cas où R est négligeable,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Le décrément logarithmique

$$\alpha T = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

70. Assimilons l'excitateur à un condensateur ; et, pour en avoir la capacité, négligeons la capacité du fil. L'action réciproque des deux sphères peut aussi être négligée ; et Hertz se contente de dire que dès lors la capacité du condensateur est égale à la capacité de chacune des sphères, laquelle a pour mesure électrostatique le rayon évalué en centimètres : ici on a donc C = 15 [1].

Cette valeur est erronée ; en effet, si l'on considère l'ensemble des deux sphères comme un condensateur, la capacité de ce condensateur sera par définition le rapport de la charge d'une des sphères à la différence de potentiel des deux sphères. Si on appelle q et $-q$ les charges des deux sphères, V et — V leurs potentiels on aura en mesure électrostatique

$$q = V. 15 \text{ centimètres.}$$

La différence de potentiel sera 2V et la capacité du condensateur sera

$$\frac{q}{2V} = 7{,}5 \text{ centimètres}$$

(1) *Wied. Ann.* t. XXXI, p. 444.

71. Pour calculer la self-induction L on peut négliger les deux sphères qui constituent une faible partie de la longueur de l'appareil : la densité du courant électrique y est d'ailleurs plus faible que dans le fil. Nous avons donc à calculer la self-induction d'un cylindre d'un demi-centimètre de diamètre et de 150 centimètres de long.

On a

$$T = L\frac{i^2}{2} = \frac{1}{2}\int(Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

Si nous prenons l'axe du cylindre pour axe Ox,

$$v = w = 0$$

et

$$Li^2 = \int Fud\tau$$

Le courant n'est pas uniformément réparti sur la section du fil et l'on a :

$$i = \int ud\omega$$

intégrale étendue à tous les éléments $d\omega$ de l'aire de la section droite du fil.

$$F = \int\frac{u'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx} = F' + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx}$$

$$\psi = \int\frac{d\rho'}{dt}\, rd\tau',$$

ρ étant la densité de l'électricité libre. Ici il n'y a d'électricité

sensible qu'aux deux extrémités; donc :

$$\psi = \frac{dq_1}{dt} r_1 + \frac{dq_2}{dt} r_2$$

r_1 et r_2 étant les distances du point considéré du fil aux deux sphères ; et q_1 et q_2 les charges de ces deux sphères :

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$$

puisque l'électricité passe d'une des sphères à l'autre. Prenons pour origine l'une des extrémités, nous aurons en appelant l la longueur du fil :

$$r_1 = x, \quad r_2 = l - x$$

$$r_1 - r_2 = 2x - l$$

et

$$\psi = \frac{dq_1}{dt}(2x - l) = -i(2x - l)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -2i$$

72. Calculons maintenant $F' = \int \frac{u'd\tau'}{r}$

Soient (x', y', z') le centre de gravité de l'élément $d\tau'$; r sa distance au point (x, y, z). Soit δ la distance du point (x, y, z) à la parallèle à l'axe des x passant par (x', y', z') de sorte que (*fig.* 14) :

$$\delta^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Imaginons qu'on ait décomposé le conducteur cylindrique en une infinité de cylindres élémentaires de telle façon que

l'élément $d\tau'$ soit un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'axe des x, dont la section droite soit $d\omega'$ et la hauteur dx'; on aura :

$$d\tau' = d\omega' dx'$$

$$F' = \int \frac{u' d\omega' dx'}{r} = \int u' d\omega' \int \frac{dx'}{r}$$

car u' n'est pas fonction de x', et si l'on intègre d'abord par rapport à dx', on peut faire sortir u' du signe $\int$. On a d'ailleurs :

$$r^2 = \delta^2 + (x - x')^2$$

$$\int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2}} = \left\{ \log \left[x' - x + \sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2}\right] \right\}_0^l$$

$$= \log \frac{l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2}}{- x + \sqrt{\delta^2 + x^2}}$$

On peut négliger δ devant x et l; alors on a :

$$\log \frac{\left[l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2}\right] \left[x + \sqrt{\delta^2 + x^2}\right]}{\delta^2} = \log \frac{4x(l - x)}{\delta^2}$$

$$F' = \int u' d\omega' . \log \frac{4(xl - x^2)}{\delta^2}$$

Nous pouvons admettre que la densité du courant u' sur l'aire $d\omega'$ ne dépend que de la distance à l'axe.

Menons par le point x, y, z un plan perpendiculaire à l'axe des x; ce plan coupera le conducteur suivant un cercle. Décomposons ce cercle C en une infinité d'éléments et soit $d\omega'$ celui de ces éléments dont les coordonnées sont x', y' et z'.

Sa distance au point x, y, z sera δ. Imaginons maintenant une matière attirante distribuée à la surface de ce cercle C de façon que sa densité au point (x', y', z'), centre de gravité de $d\omega'$, soit précisément u'. Cette matière sera ainsi distribuée *en couches circulaires concentriques*. Supposons que cette matière fictive attire le point x, y, z suivant une loi convenable qu'il me reste à définir.

Fig. 14.

F' sera manifestement le potentiel dû à l'attraction de cette matière au point x, y, z si l'on suppose la loi d'attraction telle que le potentiel dû à une masse 1 située à une distance δ soit égal à $\log \frac{4\,(xl - x^2)}{\delta^2}$; *c'est un potentiel logarithmique;* et l'on sait que le potentiel logarithmique d'une matière distribuée en couches circulaires homogènes par rapport à un point extérieur est le même que si toute la matière était concentrée au centre. On a donc, en un point extérieur

$$F' = \int u' d\omega' + \log \frac{4\,(xl - x^2)}{\delta_0^2}$$

en désignant par δ_0 la distance de ce point extérieur x, y, z au centre du cercle, c'est-à-dire au point (x, o, o). Pour un point situé à la surface $\delta_0 = \frac{d}{2}$ et

$$F' = i \log \frac{16\,(xl - x^2)}{d^2}$$

Cette valeur est vraie en un point de la surface. En est-il

ainsi pour un point intérieur? Non, s'il s'agit d'un courant répandu dans la masse du fil. Mais pour un courant alternatif rapide, il est presque entièrement à la surface. On peut donc supposer tout le courant à la surface, et alors à l'intérieur $u' = 0$, et F' a une valeur constante égale à celle qui a été donnée pour un point de la surface

$$F = i\left[\log \frac{16\,(xl - x^2)}{d^2} + k - 1\right]$$

$$\int F u d\tau = \int d\omega u . dx F = \int d\omega . u \int_0^l F dx = i \int_0^l F . dx$$

$$Li^2 = i^2 \int_0^l \left[\log \frac{16\,(xl - x^2)}{d^2} + k - 1\right] dx$$

L'intégrale indéfinie est :

$$x\left[\log \frac{16}{d^2} + k - 1\right] + x(\log x - 1) - (l - x)[\log(l - x) - 1]$$

$$L = 2l\left[\log \frac{4}{d} + \frac{k-1}{2}\right] + 2l(\log l - 1)$$

$$= 2l\left[\log \frac{4l}{d} - 1 + \frac{k-1}{2}\right]$$

Hertz donne

$$2l\left[\log \frac{4l}{d} - 0,75 + \frac{1-k}{2}\right]$$

la raison de la différence est, je crois, que Hertz fait le calcul en supposant la densité du courant constante dans l'intérieur du conducteur.

C'est pour cette raison que Hertz donne comme second terme — 0,75 au lieu de — 1 ; s'il donne comme troisième

terme $\frac{1-k}{2}$ au lieu de $\frac{k-1}{2}$ cela tient vraisemblablement à une erreur de signe dans le calcul de ψ. Ces divergences ne portent d'ailleurs que sur des quantités négligeables.

En remplaçant l et d par leurs valeurs, et faisant $k = 1$, comme dans la théorie de Neumann, on a :

$$L = 1902 \text{ cm}.$$

En faisant $k = 0$, on augmenterait L de 150 centimètres.

Portons ces valeurs de L et de C dans T :

$$t = 2\pi \sqrt{LC}$$

en unités électromagnétiques ; si C′ est la capacité en mesure électrostatique

$$C = \frac{C'}{V^2}$$

ou :

$$VT = 2\pi \sqrt{LC'} = 2\pi \sqrt{1902 \times 7,5} = 7^m,51$$

V étant le rapport des unités. Hertz donne un nombre différent $5^m,31$, parce qu'il considère la vibration simple et que, d'autre part, il a commis dans le calcul de la capacité une erreur que j'ai signalée au n° **70** : pour la durée T il donne 1,77 en cent millionnièmes de seconde ; il faudrait de même dire 2,51 pour une période *complète*.

Tout cela suppose R négligeable : pour qu'il y ait oscillation, il faut que $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, c'est-à-dire < 969 ohms. Il suffit pour que la formule précédente soit valable, que R^2 soit

négligeable en présence du carré de 969 ohms : le décrément logarithmitique sera $\frac{R}{308 \text{ ohms}}$ [1].

73. Rôle de l'interrupteur. — On peut assimiler l'excitateur à un pendule qui oscille, et le rôle de l'interrupteur consiste uniquement à écarter le pendule de sa position d'équilibre par une force perturbatrice qui disparaisse dans un temps très court, et très court par rapport à la durée d'oscillation. Créer une force perturbatrice qui disparaisse dans un temps très petit relativement à un cent millionnième de seconde ne peut être réalisé par aucun moyen mécanique. Aussi a-t-on recours à une bobine de Ruhmkorff; les deux bornes se chargent d'électricités contraires, très lentement eu égard à la durée d'oscillation de l'excitateur. Il arrive un moment où, la différence de potentiel atteignant une certaine valeur, 100 unités électrostatiques environ, l'étincelle éclate ; la force contrélectromotrice qui s'opposait au passage continu d'électricité d'une des parties du fil à l'autre disparait brusquement : tout se passe comme si l'on supprimait une sorte de frottement au départ et les oscillations commencent.

La brièveté de la disparition dépend d'une foule de circonstances mal connues, de l'illumination de l'interrupteur par des rayons ultra-violets, du degré de poli des surfaces des bornes, etc. Dans un article récent, qui a été fort remarqué [2] M. Brillouin s'est placé à un point de vue différent de celui de Hertz : il assimile l'interrupteur à une anche et l'appareil

(1) Hertz donne 686 et 213 au lieu de 969 et 308 à cause de l'erreur commise sur la capacité.

(2) *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1re année, p. 141.

fonctionnerait bien quand la période de l'interrupteur serait la même que celle de l'excitateur.

Pour bien faire comprendre la différence des deux points de vue, je me bornerai à faire remarquer que, d'après les idées de M. Brillouin, une étincelle réglée pour un excitateur donné ne fonctionnerait plus avec un excitateur de période différente plus courte ou plus longue, tandis que, d'après les idées de M. Hertz, elle devrait certainement fonctionner pour tous les excitateurs de période plus longue.

Il est difficile de se prononcer sur la question : il paraît cependant peu probable que M. Brillouin ait raison et il est plus naturel de se rallier aux idées de Hertz. En tous cas, l'on n'a pas à faire intervenir l'interrupteur, dans le calcul de la période : il suffit que la résistance totale du fil, en y comprenant l'interrupteur, soit toujours négligeable par rapport à $2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

74. Objections au calcul de Hertz. — Le calcul qui précède prête à plusieurs objections. On n'a pas fait intervenir la bobine de Ruhmkorff dans le calcul de L, et pourtant elle a une self-induction énorme. Le courant peut ne pas aller d'un bout à l'autre du fil; enfin, l'on n'a pas tenu compte des courants de déplacement produits dans le diélectrique : il y a radiation électrique et l'énergie ne se dissipe pas seulement par dépense de chaleur dans le fil, mais encore par rayonnement de force électrique; or, dans le calcul du décrément logarithmique, on n'a tenu compte que de la perte de chaleur; le décrément est plus grand en réalité.

75. Hertz ne tient aucun compte de la bobine de Ruhmkorff dans le calcul de la période. L'influence perturbatrice exercée par la bobine sur la durée propre de l'oscillation de l'excitateur, est tout à fait négligeable. Considérons en effet l'excitateur AB,

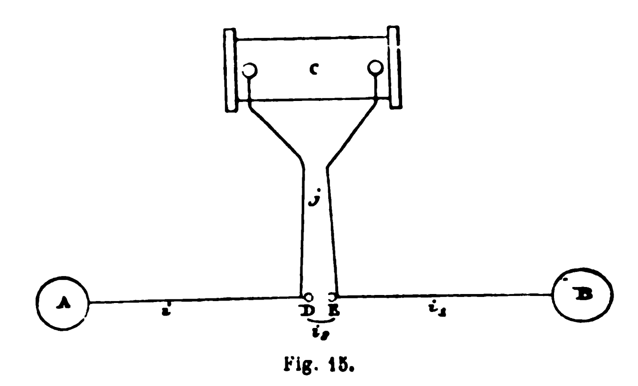


Fig. 15.

interrompu en DE ; soit i le courant qui parcourt la branche AD ; i_1 celui qui parcourt EB ; i_2 celui qui passe de D en E, et j celui qui parcourt le fil secondaire ECD de la bobine C. Les lois de Kirchhoff donnent :

$$i_2 = i + j$$
$$i_1 = i_2 - j$$

d'où

$$i_1 = i.$$

Nous avons ainsi deux courants : l'un i qui va de A en B, l'autre, d'intensité j, qui suit le circuit fermé DECD : les deux circuits ont d'ailleurs une partie commune DE.

Appliquons les lois de Ohm : si L est la self-induction de AB, N celle de la bobine, et M l'induction mutuelle des deux circuits ; C la capacité des boules, R la résistance de AB,

et S celle du circuit DECD ; enfin, q la charge de la première des deux sphères, on a :

$$\begin{cases} Ri = -L\dfrac{di}{dt} - M\dfrac{dj}{dt} - \dfrac{q}{C} \\ Sj = -M\dfrac{di}{dt} - N\dfrac{dj}{dt} \end{cases}$$

On sait que $i = \dfrac{dq}{dt}$.

$$\begin{cases} CL\dfrac{d^2q}{dt^2} + CR\dfrac{dq}{dt} + CM\dfrac{dj}{dt} + q = 0 \\ N\dfrac{dj}{dt} + Sj + M\dfrac{d^2q}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Intégrons :

$$\begin{cases} q = e^{\alpha t} \\ j = \lambda e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 + CM\lambda\alpha = 0 \\ \lambda(N\alpha + S) + M\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

Éliminons λ :

$$(CL\alpha^2 + CR\alpha + 1)(N\alpha + S) - CM^2\alpha^3 = 0$$

L, C et R sont petits, N et S sont grands ; M est très petit, même par rapport à L. Dans une première approximation, on pourra donc négliger le second terme et l'équation se décompose : en égalant à O le premier facteur, on a :

$$(1) \qquad CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 = 0$$

Ce qui est l'équation précédemment étudiée, obtenue quand

on néglige la self-induction de la bobine. On a sensiblement

$$\alpha = \frac{\pm i}{\sqrt{CL}}.$$

En remplaçant α par cette valeur, nous obtiendrons une seconde approximation : nous pouvons écrire :

$$(2) \qquad CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 = \frac{CM^2\alpha^3}{N\alpha + S}$$

Remplaçons α dans le second membre par cette valeur $\frac{\pm i}{\sqrt{CL}}$: nous avons alors une équation dont le terme connu est 1 moins une certaine constante, et l'erreur commise en prenant pour racines les racines de l'équation (2) est de l'ordre de grandeur du second membre de l'équation (2). Ce second membre est approximativement $\frac{CM^2\alpha^2}{N}$, α étant très grand, c'est-à-dire : $-\frac{M^2}{NL}$, et l'erreur qu'on commet en le négligeant est absolument insignifiante, précisément parce que la self-induction N de la bobine de Ruhmkorff est énorme.

Tout se passe comme si, à la boule d'un premier pendule, on en attachait un second ; si les boules suspendues aux deux pendules sont à peu près de même masse, les périodes sont très altérées ; si, au contraire, le premier pendule étant très long et sa boule de masse considérable, le second est court et de faible masse, sa durée d'oscillation sera peu altérée par le mouvement du premier pendule.

Le calcul qui précède est extrêmement grossier puisque nous ne tenons aucun compte des effets énormes de capacité qui se produisent dans la bobine. Mais le résultat ne serait pas

modifié si on en tenait compte; la capacité se comporterait comme la self-induction et n'exercerait aucune influence sur la durée de la période, *précisément parce qu'elle est très grande.*

Nous avons vu que par suite d'une erreur commise par ce savant dans le calcul de la capacité, la valeur que donne Hertz pour la période T doit être divisée par $\sqrt{2}$ et, comme la longueur d'onde dans l'air reste égale au nombre que Hertz a trouvé expérimentalement, la vitesse de propagation qu'il en déduit doit être multipliée par $\sqrt{2}$. Or il trouve une vitesse de propagation dans l'air très voisine de celle de la lumière, c'est-à-dire de 300,000 kilomètres par seconde : la vitesse déduite de ses expériences correctement interprétées serait donc non plus 300,000, mais $300{,}000 \times \sqrt{2}$. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Ne peut-on du moins espérer qu'une autre correction vienne compenser celle-là? C'est peu probable. On a négligé dans le calcul de la self-induction les courants de déplacement qui vont d'une boule à l'autre à travers le diélectrique : mais J.-J. Thomson a montré que la période est peu altérée de ce chef. En effet le terme qui changera dans l'expression de F, ce sera F', $\frac{d\psi'}{dx}$ restera invariable. F', c'est l'intégrale $\int \frac{u' d\tau'}{r}$ étendue à tous les courants de déplacement et de conduction; et on ne l'a étendue qu'aux courants de conduction. Mais il semble bien que le terme qui leur correspond soit de beaucoup le plus important. Le fil est, en effet, de petit diamètre; un point quelconque de la surface ou de l'intérieur est beaucoup plus près des courants de conduction que des courants de

déplacement, qui sont disséminés dans tout l'espace ; et quant à ceux qui passent très près du point, leur intensité est beaucoup plus faible que celle des courants de conduction correspondants. C'est là sans doute un raisonnement grossièrement approximatif, mais il suffit à montrer qu'on n'aura pas à multiplier la période par un facteur de l'ordre de $\sqrt{2}$.

76. Une autre correction serait peut-être nécessaire, ainsi que l'a montré J.-J. Thomson. Le courant ne va pas tout entier d'une boule à l'autre : une fraction du courant aboutit à la surface du fil. Thomson admet arbitrairement que la variation du courant le long du fil est représentée par une fonction sinusoïdale : la période serait alors plus grande que celle que donne Hertz, c'est bien dans ce sens qu'il faudrait une correction pour rétablir l'accord entre la vitesse des ondes électromagnétiques dans l'air, et celle de la lumière : seulement le facteur par lequel il faut multiplier la période n'est que 1,05, et l'on est encore loin de compte.

Ainsi l'un des résultats, généralement considérés comme les plus importants de Hertz, ne serait dû qu'à une faute de calcul. Nous verrons par la suite, que dût-on le rejeter définitivement, les expériences de Hertz n'en conservent pas moins un très grand intérêt, et que les conclusions qu'on peut en tirer au point de vue des théories électrodynamiques n'en sont pas moins rigoureuses.

77. La force électrique aboutit normalement aux conducteurs. — Une question importante se pose encore au sujet de l'excitateur. Comment est réparti le courant dans la section du fil ? Nous allons montrer que, d'une manière générale, quand un conducteur est le siège de courants alternatifs

extrêmement rapides, le courant de conduction est presque tout entier à la surface du conducteur. J'emploierai constamment, pour l'étude des équations différentielles linéaires qui se rencontrent dans ces questions et qui admettent pour intégrales des fonctions périodiques, la méthode qui consiste à introduire des exponentielles imaginaires (¹).

Cette méthode consiste à chercher à satisfaire aux équations du champ électromagnétique par des fonctions *imaginaires* contenant en facteur une exponentielle imaginaire. Comme les équations sont linéaires et à coefficients réels, les parties réelles de ces fonctions y satisferont également. Il suffira donc, une fois le calcul terminé, de conserver les parties réelles des fonctions auxquelles on sera parvenu. Cette méthode simplifie beaucoup les écritures, toutes les fois qu'on a à étudier un phénomène périodique.

La composante F du potentiel vecteur, par exemple, est une fonction périodique du temps, à période $\frac{2\pi}{p}$. Posons donc

$$F = F_0 e^{ipt}$$
$$\frac{dF}{dt} = ipF$$
$$\frac{d^2F}{dt} = -p^2F.$$

La période étant très petite, p est un nombre très grand, ce qui simplifiera les calculs.

Nous supposerons toujours $\mu = 1$. Pour presque tous les corps, μ est très voisin de 1 ; et pour le fer, tout se passe comme pour un conducteur quelconque, ainsi que Hertz l'a montré par expérience (²); sans doute, l'aimantation par in-

(¹) Voir *Théorie mathématique de la lumière*, § 50, p. 58. et *passim*.

fluence n'est pas instantanée, et elle n'a pas le temps de se produire pour des courants d'induction aussi rapides.

Soient X, Y, Z les composantes de la force électrique

$$X = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx};$$

pour un conducteur $X = \frac{u}{C}$; en intégrant le long d'un contour fermé quelconque,

$$(1) \quad \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{1}{C}\int (udx + vdy + wdz)$$

Or

$$\int \left(\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz\right) = 0\,;$$

donc le premier membre devient :

$$-\int \left(\frac{dF}{dt}dx + \frac{dG}{dt}dy + \frac{dH}{dt}dz\right)$$

ce qui est égal à

$$-\,ip\int (Fdx + Gdy + Hdz)$$

Donc :

$$\int (Fdx + Gdy + Hdz) = \frac{i}{pC}\int (udx + vdy + wdz)$$

p est très grand, le second membre est donc très petit. S'il est nul, on a :

$$\int (Fdx + Gdy + Hdz) = 0$$

c'est-à-dire qu'à l'intérieur d'un conducteur $F dx + G dy + H dz$ est une différentielle exacte.

On a d'ailleurs, dans les hypothèses de Maxwell,

$$\alpha = \frac{a}{\mu} = a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = 0$$

alors α, β, γ sont nuls; et de même u, v, w, puisque

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \text{ etc.}$$

Donc, à l'intérieur des conducteurs, pas de courant : il n'y en a que dans le diélectrique et à la surface des conducteurs. On arriverait au même résultat en faisant C infini, c'est-à-dire en supposant le conducteur parfait. C'est pourquoi l'on peut dire qu'en cela les conducteurs se comportent comme conducteurs parfaits.

78. On peut objecter, il est vrai, que $\int (u dx + v dy + w dz)$ pourrait être très grand : alors le second membre de l'équation (1) n'est pas très petit. L'objection tombe si l'on remarque que $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}$ qui représente la chaleur de Joule, serait alors très grand, ce qui est impossible parce que la perte d'énergie étant très grande, une pareille situation ne pourrait se maintenir que pendant un temps très court.

D'ailleurs l'expérience confirme pleinement ce résultat en montrant qu'on peut remplacer un conducteur par un autre de nature et, par suite, de conductibilité différentes, sans changer en rien les phénomènes.

Mais le raisonnement par lequel on a montré que le premier membre de l'équation (1) est très petit n'est-il pas applicable à un diélectrique ?

$$\int (F\,dx + G\,dy + H\,dz) = \frac{4\pi i}{pK} \int (f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

et, en différentiant par rapport au temps :

$$\int (F\,dx + G\,dy + H\,dz) = \frac{4\pi}{p^2 K} \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz);$$

si p est grand, p^2K est très grand. Il semblerait donc qu'il n'y ait pas de courant dans le diélectrique; mais le raisonnement n'est plus applicable : d'abord, p^2K n'est pas très grand comme pC; s'il y a 100 millions de vibrations par seconde,

$$p = 2\pi.10^8.$$

C, pour un métal comme le cuivre, est de l'ordre de $\frac{1}{10^4}\cdot$ K est, en unités C. G. S., l'inverse du carré de la vitesse de la lumière.

Donc

$$\frac{p^2K}{4\pi}, \quad \text{c'est} \quad \frac{\pi}{18}\cdot 10^{-4}$$

et

$$pC \quad \text{c'est} \quad 2\pi.\,10^4.$$

En outre, lors même que p^2K serait très grand, l'on pourrait dire qu'ici rien n'empêche de supposer très grand $\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$; on n'a plus à craindre, comme dans le cas des conducteurs, d'avoir une chaleur de Joule infinie.

79. Ainsi, à l'intérieur d'un conducteur, pas de courant, pas de force électromotrice. La fonction φ est continue quand on traverse la surface et si on prend la normale pour axe des z, les deux dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps, sont continues : mais $\frac{d\varphi}{dz}$ est discontinue.

Quant aux composantes F, G, H, elles sont continues, car

$$F = \int \frac{u'd\tau'}{r}$$

est le potentiel dû à une matière attirante de densité u, et ce potentiel est continu lors même que la distribution de la matière attirante est superficielle : mais il n'en est pas de même de ses dérivées par rapport aux coordonnées. Les dérivées par rapport au temps de F, G, H sont également continues.

Ainsi la force d'induction est continue quand on traverse la surface, la force électrostatique est discontinue, en ce sens que sa composante normale est discontinue. Il en est de même, par suite, de la force électromotrice totale. Et puisqu'en un point intérieur cette force totale est nulle et que les composantes tangentielles sont continues, c'est dire qu'à l'extérieur la force électrique aboutit normalement à la surface du conducteur : dans le cas d'oscillations extrêmement rapides, nous aurons donc à imposer comme condition aux limites aux lignes de force électrique, d'aboutir normalement aux conducteurs ; c'est là une conséquence nécessaire du fait que le courant de conduction est localisé à la surface du conducteur et c'est une conséquence très importante : l'expérience d'ailleurs, et nous aurons l'occasion de revenir sur ce point, ne l'a pas vérifiée parfaitement ou, tout au moins, laisse place au doute.

Les lignes de force magnétique au contraire sont tangentes à la surface du conducteur. Il nous suffit pour le démontrer de faire voir que le flux de force magnétique qui traverse une portion quelconque de la surface du conducteur est nul. Or ce flux est égal à l'intégrale

$$\int(\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz) = \frac{1}{ip}\int\left(\frac{d\mathrm{F}}{dt}dx + \frac{d\mathrm{G}}{dt}dy + \frac{d\mathrm{H}}{dt}dz\right)$$

prise le long du contour de cette portion de surface.

Or :

$$\mathrm{X} = -\frac{d\mathrm{F}}{dt} - \frac{d\varphi}{dx} \text{ et } \int\left(\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz\right) = 0$$

Le flux cherché est donc égal à

$$-\frac{1}{ip}\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

Or la force électrique étant normale au conducteur, on a : $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$; donc le flux est nul.

C. Q. F. D.

CHAPITRE IX

ÉTUDE DU CHAMP PRODUIT PAR L'EXCITATEUR

80. Donnons, d'après Hertz, le calcul du champ électromagnétique produit par l'excitateur.

Considérons un excitateur de révolution autour de OZ; le champ sera aussi de révolution. Les lignes de force électrique et magnétique, passant par un point donné, étant symétriques par rapport au plan méridien contenant ce point, il s'ensuit que toutes les lignes de force ou bien sont contenues dans des plans méridiens, ou bien sont normales à tous les plans méridiens qu'elles rencontrent, c'est-à-dire sont des parallèles.

Les lignes de force électrique, étant normales aux conducteurs, d'après la théorie précédente, ne peuvent être des parallèles : elles seront donc contenues dans des plans méridiens, et les parallèles seront des lignes de force magnétique.

On a donc

$$\gamma = 0$$

et, d'après cela, l'équation (6) § 50, p. 116, se réduit à :

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = 0;$$

équation qui exprime que $\alpha dy - \beta dx$ est une différentielle exacte, si x et y sont seuls considérés comme variables. Désignons par $\frac{d\Pi}{dt}$ la fonction intégrale :

$$\alpha dy - \beta dx = d\frac{d\Pi}{dt}$$

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{d^2\Pi}{dydt} \\ \beta = -\dfrac{d^2\Pi}{dxdt} \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Quant aux composantes du déplacement électrique, les équations (4), § 50, p. 115, donnent:

$$(2)\qquad \begin{cases} 4\pi\dfrac{df}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz} = \dfrac{d^3\Pi}{dxdzdt} \\ 4\pi\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx} = \dfrac{d^3\Pi}{dydzdt} \\ 4\pi\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d\beta}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} = -\dfrac{d^3\Pi}{dx^2dt} - \dfrac{d^3\Pi}{dy^2dt} \end{cases}$$

La première des équations (2) montre que

$$4\pi f - \frac{d^2\Pi}{dxdz}$$

est une fonction indépendante du temps ; elle ne jouera donc aucun rôle dans le phénomène périodique qu'il s'agit d'étudier, et l'on peut la supposer nulle.

$$(3)\qquad \begin{cases} 4\pi f = \dfrac{d^2\Pi}{dxdz} \\ 4\pi g = \dfrac{d^2\Pi}{dydz} \\ 4\pi h = -\dfrac{d^2\Pi}{dx^2} - \dfrac{d^2\Pi}{dy^2} \end{cases}$$

81. Dans l'équation (3) du § 50, p. 115, remplaçons α, g, h, par leurs valeurs en fonction de Π. L'équation :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right)$$

nous donne :

$$K\frac{d^3\Pi}{dydt^2} = \frac{d^3\Pi}{dx^2dy} + \frac{d^3\Pi}{dy^3} + \frac{d^3\Pi}{dz^2dy} = \frac{d\Delta\Pi}{dy}$$

ou

$$\frac{d}{dy}\left(K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi\right) = 0$$

De même,

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi\right) = 0$$

Donc $K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi = f(z, t)$, et ne dépend ni de x ni de y. On peut supposer cette fonction f nulle, car si on ajoute à Π une fonction arbitraire de z et de t cela ne change rien au champ ; car toutes les composantes α, β, γ, f, g, h, contiennent en facteur les dérivées de Π prises au moins une fois par rapport à x ou à y.

Ainsi

$$K\frac{d^2\Pi}{dt^2} = \Delta\Pi \tag{4}$$

Il est à remarquer que Π n'est pas une fonction quelconque de x, y, z ; puisque le champ se reproduit par une rotation quelconque autour de oz. Π est fonction de z et de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou, si l'on veut, de z et de $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

82. Cherchons les équations des lignes de force électrique : les équations différentielles sont :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h} \tag{5}$$

Cherchons l'équation de la ligne contenue dans le plan des zx : $y = 0$, $x = \rho$.

Les équations (5) deviennent :

$$y = 0$$
$$hdx - fdz = 0$$

ou :

$$\frac{d^2\Pi}{dxdz} dz + \left(\frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2}\right) dx = 0$$

En prenant pour coordonnées z et ρ, cette équation devient :

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho dz} dz + \left(\frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Pi}{d\rho}\right) d\rho = 0$$

Rendons différentielle exacte, en multipliant par ρ

$$\rho \frac{d^2\Pi}{d\rho dz} dz + \left(\rho \frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{d\Pi}{d\rho}\right) d\rho = 0$$

et, en intégrant :

$$\rho \frac{d\Pi}{d\rho} = \text{const.}$$

Avec les coordonnées x et y, l'équation d'une ligne de force contenue dans un plan méridien quelconque est donc :

$$x \frac{d\Pi}{dx} + y \frac{d\Pi}{dy} = \text{const.} \tag{6}$$

83. Un cas particulier intéressant est celui où Π est fonc-

tion seulement de r, distance à l'origine ; une transformation bien connue donne :

$$\Delta\Pi = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Pi}{dr}$$

II est alors défini par l'équation :

$$K\frac{d^2\Pi}{dt^2} = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Pi}{dr}$$

L'équation prend une forme plus simple en posant :

$$\Pi = \frac{\theta}{r}; \text{ elle devient :}$$

$$(7) \qquad \frac{d^2\theta}{dr^2} = K\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

c'est l'équation des cordes vibrantes, dont l'intégrale est :

$$(8) \qquad \theta = \theta_1\left(r + \frac{t}{\sqrt{K}}\right) + \theta_2\left(r - \frac{t}{\sqrt{K}}\right)$$

84. Excitateur sphérique de Lodge. — Appliquons à un exemple susceptible d'être traité complètement. Soit une sphère conductrice plongée dans un champ électrique uniforme ; de l'électricité positive se porte sur un hémisphère, de l'électricité négative sur l'autre, et l'équilibre est supposé atteint à l'origine du temps. On supprime brusquement le champ : il en résulte des vibrations électriques dans le conducteur et dans le diélectrique environnant. Lodge a étudié ce cas expérimentalement.

La sphère plongée dans un champ uniforme se comporte

comme un *élément électrique* orienté suivant le champ

$$4\pi f = -K\frac{d\varphi}{dx},$$

ici pas de courant. donc F, G, H sont nuls.

$$\varphi = C\frac{d\frac{1}{r}}{dz},$$

C étant une constante que nous pouvons prendre égale à $-\frac{1}{K}$, de manière à n'avoir pas de coefficient dans les formules :

$$4\pi f = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}$$

$$4\pi g = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydx}$$

$$4\pi h = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = -\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} - \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}, \text{ car } \Delta\frac{1}{r} = 0$$

En comparant aux équations (3), nous voyons que la valeur initiale de Π est $\Pi = \frac{1}{r}$; celle de θ est $\theta = 1$, et la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$ est o, puisqu'au début il y a équilibre et que l'équilibre persiste.

On supprime le champ électrique ; θ va commencer à varier, d'après la formule :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = K\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Etablissons les conditions aux limites : on a à l'origine une sphère de rayon a; écrivons qu'à la surface les lignes de force électrique sont normales à la sphère :

Weber ?
Pogg. 170.

$$\frac{f}{x} = \frac{g}{y} = \frac{h}{z}$$

En considérant seulement les deux rapports extrêmes,

$$\frac{4\pi f}{x} = \frac{4\pi h}{z} \tag{9}$$

Transformons, en convenant de représenter par des lettres accentuées les dérivées successives de θ par rapport à r :

$$\frac{d\Pi}{dx} = \left(\frac{\theta'}{r} - \frac{\theta}{r^2}\right)\frac{x}{r} = \left(\frac{\theta'}{r^2} - \frac{\theta}{r^3}\right)x$$

$$\frac{d^2\Pi}{dxdz} = \left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3\theta'}{r^3} + \frac{3\theta}{r^4}\right)\frac{xz}{r} = 4\pi f$$

$$\frac{4\pi f}{x} = \frac{z}{r}\left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3\theta'}{r^3} + \frac{3\theta}{r^4}\right)$$

De même

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \left(\frac{\theta'}{r^2} - \frac{\theta}{r^3}\right) + \frac{x^2}{r}\left(\frac{\theta''}{r^2} - \frac{3\theta'}{r^3} + \frac{3\theta}{r^4}\right)$$

expression que nous pouvons écrire pour abréger

$$= \mathrm{B} + \frac{x^2}{r}\mathrm{A}$$

On aurait de même :



$$\frac{d^2\Pi}{dy^2} = \mathrm{B} + \frac{y^2}{r}\mathrm{A}$$

et l'équation (9) devient :

$$\frac{z}{r} A = -\frac{2}{z} B - \frac{x^2 + y^2}{rz} A = -\frac{2}{z} B - \frac{r^2}{rz} A + \frac{z}{r} A$$

ou :

$$2B + rA = 0$$

En substituant et multipliant par r, il vient :

$$\theta'' - \frac{\theta'}{r} + \frac{\theta}{r^2} = 0$$

Cette équation doit être vérifiée pour $r = a$:

$$(10) \qquad \theta'' - \frac{\theta'}{a} + \frac{\theta}{a^2} = 0$$

85. D'après ces conditions déterminons θ, c'est-à-dire les deux fonctions θ_1 et θ_2 qui entrent dans l'équation (8). A l'origine du temps $t = 0$, $\theta = 1$, et $\frac{d\theta}{dt} = 0$

$$\theta_1 (r) + \theta_2 (r) = 1$$
$$\theta_1' (r) - \theta_2' (r) = 0$$

d'où

$$\theta_1 (r) - \theta_2 (r) = \text{const.}$$

$\theta_1 (r)$ et $\theta_2 (r)$ sont égaux à une constante près : si on ajoute une constante à θ_1 et qu'on la retranche à θ_2, on ne change rien à θ ; on peut donc prendre à l'origine du temps :

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 1.$$

Ceci est vrai pour r quelconque *pourvu que r soit* $> a$.

Faisons croître t à partir de 0 ; à l'instant t, la fonction

$\theta_1\left(r + \frac{t}{\sqrt{K}}\right)$ a la même valeur pour une distance r, qu'elle avait à l'instant o pour la distance $r' = r + \frac{t}{\sqrt{K}}$. Si r était $> a$, à plus forte raison $r' > a$, puisque t est positif : donc θ_1 reste nul en tout point extérieur a la sphère. θ_2 conserve de même la valeur constante 1 tant que $r - \frac{t}{\sqrt{K}} > a$. Pour les valeurs de r comprises entre a et $a + \frac{t}{\sqrt{K}}$, θ se réduit à θ_2 ; mais θ_2 n'est plus égal à 1 : cette fonction est alors déterminée par l'équation différentielle (10).

86. Posons $r - \frac{t}{\sqrt{K}} = \xi$, et cherchons à satisfaire à l'équation en posant :

$$\theta = e^{\alpha\xi}$$

$$\alpha^2 - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{a^2} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2a} \pm \frac{i}{2a}\sqrt{3}$$

$$\theta = e^{\frac{\xi}{2a} \pm \frac{i\xi}{2a}\sqrt{3}} = \text{pour une valeur donnée de } r,$$

$$Ae^{-\frac{t}{2a\sqrt{K}} \pm \frac{it}{2a\sqrt{K}}\sqrt{3}}$$

La période T de la vibration est donnée par :

$$\frac{T\sqrt{3}}{2a\sqrt{K}} = 2\pi$$

et la longueur d'onde $\lambda = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}}$.

Le décrément logarithmique est donné par le coefficient

de t dans la partie réelle de l'exposant de e ; il est ici $\frac{1}{2a\sqrt{K}} \times T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, ce qui est une valeur très considérable, et l'amplitude, après une oscillation, est réduite à une faible fraction de sa valeur : c'est pourquoi les excitateurs sphériques de Lodge semblent peu propres à permettre des expériences d'interférence, la vibration qui suit étant trop petite pour interférer avec celle qui précède.

Pour des valeurs de l'argument inférieures à a, la fonction θ se réduit donc à une exponentielle, dont la partie réelle peut se mettre sous la forme :

$$e^{-h\xi} \cos m\xi$$

On a un mouvement vibratoire dont l'amplitude va constamment en décroissant, et le problème est complètement traité. En résumé, à l'extérieur d'une sphère dont le rayon va sans cesse en croissant avec le temps, il n'y a pas de perturbation. Il y a donc une série d'ondes sphériques se propageant avec la vitesse de la lumière.

On a supposé qu'on partait d'un certain état initial; en réalité, l'excitateur sphérique peut donner lieu à des vibrations de périodes différentes. A chaque fonction sphérique II correspond une vibration particulière, un harmonique différent, de période plus courte que la période précédente, et en même temps de décrément logarithmique plus grand ; ces harmoniques s'éteignent donc tout de suite.

87. Application à l'excitateur de Hertz. — Le calcul est tout à fait analogue. Hertz traite le problème suivant : on a un élément électrique variable, placé à l'origine et ori[illegible]

suivant Oz ; deux masses $+E$ et $-E$ sont à une distance l infiniment petite, et le moment El est fonction périodique du temps. Quel est le champ électromagnétique produit?

Pour pouvoir assimiler l'excitateur à un pareil élément, il faudrait que l pût être considéré comme très petit ; or l est de l'ordre de grandeur de 1 mètre ; mais les expériences étant peu précises, on obtiendra, en partant de ces hypothèses, une approximation bien suffisante.

Π va être fini et continu dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées premières, sauf au voisinage de l'origine où est l'élément. Etudions ce qui se passe au voisinage de l'origine :

$$(11) \qquad \frac{4\pi f}{K} = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}$$

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

On doit comprendre dans u' le courant de déplacement dans le diélectrique et le courant qui circule dans l'excitateur lui-même ; dans l'excitateur, le courant est dirigé suivant Oz et son intensité est $\frac{d(El)}{dt}$: il n'a donc pas de composante u' et F se réduit aux termes provenant des courants de déplacement, F est par suite fini, de même que G.

Mais pour $H = \int \frac{w' d\tau'}{r}$ le terme $\frac{d(El)}{dt}$ provenant du courant dans l'excitateur est infini ; et par suite H est infini aussi, à l'origine.

$$H = \text{quantité finie} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d(El)}{dt}.$$

De même pour φ :

$$\varphi = \frac{d\frac{1}{r}}{dz} El$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} El$$

$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ sont infinies à l'origine.

Il en est donc de même de $4\pi f$, $4\pi g$, $4\pi h$; mais dans ces fonctions, on connaît la valeur des termes qui deviennent infinis à l'origine.

88. Supposons donc que El soit fonction périodique du temps.

$$El = \mu \sin pt.$$

$$\varphi = -\frac{\mu \sin pt}{K} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

Toutes les fonctions Π, f, g, h, vont être aussi des fonctions périodiques de la forme $A \sin(pt + k)$, et l'on aura par exemple :

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -p^2 f$$

La troisième des équations (3) (p. 172) peut s'écrire, en ayant égard à (4) :

$$4\pi h = \frac{d^2\Pi}{dz^2} - K\frac{d^2\Pi}{dt^2}$$

Mais

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = -p^2\Pi$$

Donc :

$$4\pi h = \frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi.$$

Nous avons à satisfaire aux équations (11) :

$$(11) \quad \begin{cases} 4\pi f = -K\dfrac{dF}{dt} - K\dfrac{d\varphi}{dx} \\ 4\pi g = -K\dfrac{dG}{dt} - K\dfrac{d\varphi}{dy} \\ 4\pi h = -K\dfrac{dH}{dt} - K\dfrac{d\varphi}{dz} \end{cases}$$

F est le potentiel dû à une matière attirante de densité u, et comme il n'y a pas de courant de conduction parallèle à Ox, il n'y a que des courants de déplacement $u = \frac{df}{dt}$; employons une notation nouvelle et convenons d'écrire (pour exprimer que F est le potentiel d'une matière attirante de densité $\frac{df}{dt}$) :

$$(12) \quad \begin{cases} F = P\left(\dfrac{df}{dt}\right) \\ G = P\left(\dfrac{dg}{dt}\right) \end{cases}$$

Mais pour H, il faut tenir compte du courant de conduction : si on le suppose concentré à l'origine, il a pour masse

$$il = l\frac{dE}{dt}$$



$$H = P\left(\frac{dh}{dt}\right) + \frac{l\dfrac{dE}{dt}}{r}$$

89. Pour satisfaire à ces conditions, Hertz pose :

$$\Pi = \frac{\mu \sin(pt - pr\sqrt{K})}{r} \tag{14}$$

La fonction Π satisfait d'abord à l'équation (4) puisqu'elle est de la forme $\dfrac{f\left(r - \frac{t}{\sqrt{K}}\right)}{r}$.

Posons maintenant $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{\mu \sin pt}{r} \\ \Pi_1 &= \frac{\mu}{r}\left[\sin(pt - pr\sqrt{K}) - \sin pt\right] \end{aligned}\right.$$

la quantité entre crochets s'annule pour $r = 0$; donc Π_1 ne devient pas infini à l'origine et peut, par suite, être développé suivant les puissances croissantes de r.

$$\varphi = -\frac{1}{K}\frac{d\Pi_2}{dz}$$

$$\left\{\begin{aligned} -K\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d^2\Pi_2}{dx\,dz} \\ -K\frac{d\varphi}{dz} &= \frac{d^2\Pi_2}{dz^2} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\begin{aligned} 4\pi f = \frac{d^2\Pi}{dx\,dz} &= -K\frac{dF}{dt} - K\frac{d\varphi}{dx} \\ &= -K\frac{dF}{dt} + \frac{d^2\Pi_2}{dx\,dz}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$-K\frac{dF}{dt} = \frac{d^2\Pi_1}{dx\,dz}$$

Et de même :

$$\frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi = -K\frac{dH}{dt} + \frac{d^2\Pi_2}{dz^2};$$

d'où :

$$-K\frac{dH}{dt} = \frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1 + Kp^2\Pi_2$$

Je vais montrer que ces formules concordent bien avec les formules (12), (13) et (14).

$$(16)\quad\begin{cases} -K\dfrac{dF}{dt} = -KP\left(\dfrac{d^2f}{dt^2}\right) = Kp^2P(f) \\ -K\dfrac{dH}{dt} = -KP\left(\dfrac{d^2h}{dt^2}\right) - K\dfrac{l\dfrac{d^2E}{dt^2}}{r} = -Kp^2P(h) + Kp^2\Pi_2, \end{cases}$$

car

$$\frac{l\dfrac{d^2E}{dt^2}}{r} = -\frac{p^2lE}{r} = -\frac{p^2\mu\sin pt}{r} = -p^2\Pi_2$$

On doit avoir :

$$(17)\quad\begin{cases} Kp^2P(f) = \dfrac{d^2\Pi_1}{dxdz} \\ Kp^2P(h) = \dfrac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1 \end{cases}$$

En effet :

$$\Delta\Pi_2 = 0$$

$$\Delta\Pi_1 = \Delta\Pi = K\frac{d^2\Pi}{dt^2} = -Kp^2\Pi$$

$$\Delta\frac{d^2\Pi_1}{dxdz} = -Kp^2\frac{d^2\Pi}{dxdz} = -Kp^2.4\pi f.$$

$$\Delta\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} = -Kp^2\frac{d^2\Pi}{dz^2}$$

et

$$\Delta\left(\frac{d^2\Pi_1}{dz^2}+Kp^2\Pi_1\right)=-Kp^2\left(\frac{d^2\Pi}{dz^2}+Kp^2\Pi\right)$$
$$=-Kp^2.4\pi h$$

Or l'équation de Poisson nous apprend que ;

$$\psi=-\frac{1}{4\pi}P(\Delta\psi),$$

quand ψ et ses dérivées sont finies dans tout l'espace. Donc :

$$\frac{d^2\Pi_1}{dxdz}=-\frac{1}{4\pi}P\left(\Delta\frac{d^2\Pi_1}{dxdz}\right)=-\frac{1}{4\pi}P(-p^2K.4\pi f)$$
$$=Kp^2P(f).$$

et de même :

$$\frac{d^2\Pi_1}{dz^2}+Kp^2\Pi_1=-\frac{1}{4\pi}P(-p^2K.4\pi h)=Kp^2P(h)$$

ce qui était à vérifier.

Dès lors, la comparaison des équations (15), (16) et (17) donne immédiatement :

$$-K\frac{dF}{dt}-K\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d^2\Pi_2}{dxdz}+\frac{d^2\Pi_1}{dxdz}=\frac{d^2\Pi}{dxdz}=4\pi f,$$

et deux équations analogues pour g et h.

Le résultat de Hertz est donc pleinement justifié car la fonction Π définie par l'équation (14) satisfait bien à toutes les conditions du problème.

RADIATION DE L'ÉNERGIE

90. L'énergie électromagnétique dont l'excitateur est la source se dissipe en vibrations, de même que l'énergie d'une source lumineuse. Il importe de se rendre compte de cette dissipation d'énergie.

On a :

$$T + U = \int \left(\frac{\Sigma \alpha^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{K} \sum f^2 \right) d\tau$$

Reportons-nous aux équations (3) et (4) du chapitre VI (p. 115, § 50), et considérons le vecteur dont les composantes A, B, C sont définies par les équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} KA = \beta h - \gamma g \\ KB = \gamma f - \alpha h \\ KC = \alpha g - \beta f \end{cases}$$

J'appellerai ce vecteur le vecteur radiant : il est le *produit géométrique* de la force magnétique et du déplacement électrique (au facteur K près) : il est perpendiculaire aux deux systèmes de lignes de force, électrique et magnétique.

On vérifie sans peine l'identité :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) \right] = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{d(T + U)}{dt} = \int \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) d\tau$$

Considérons la quantité d'énergie contenue dans une surface fermée : l'intégrale de volume peut se transformer en une intégrale étendue à l'aire de la surface fermée.

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \int (lA + mB + nC)\, d\omega = \int A_n d\omega$$

A_n étant la composante normale à la surface, du vecteur radiant : tout se passe donc comme si dans le temps dt une quantité d'énergie $dt \int A_n d\omega$ s'échappait, *rayonnait* au travers de la surface $\int d\omega$.

On peut remarquer que l'énergie rayonnée à travers une surface conductrice est nulle, puisque le vecteur radiant est partout tangent à la surface, comme perpendiculaire aux lignes de force électrique, qui sont normales.

91. En revenant à la fonction II précédemment étudiée, cherchons la quantité d'énergie rayonnée à travers une sphère de très grand rayon.

Le parallélogramme construit sur les deux vecteurs : force magnétique et déplacement électrique, est un rectangle, car les lignes de force magnétique sont des parallèles et les lignes de force électrique sont dans des plans méridiens. Prenons une sphère de très grand rayon, la force magnétique en un point de la surface est toujours tangente · la force électrique qui n'est pas tangente en général, fait avec le plan tangent un angle d'autant plus petit que le rayon est plus grand, et pour un rayon très-grand elle peut être considérée comme tangente à la sphère : le vecteur radiant est donc normal. Sa direction étant connue, calculons sa grandeur.

Les composantes de la force magnétique sont $-\frac{d\Pi}{dy}$ et $\frac{d\Pi}{dx}$; dans le calcul de Π s'introduiront des termes en $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$; nous négligerons les termes contenant les puissances de $\frac{1}{r}$ supérieures à la première, et nous aurons comme valeur approchée de la force magnétique :

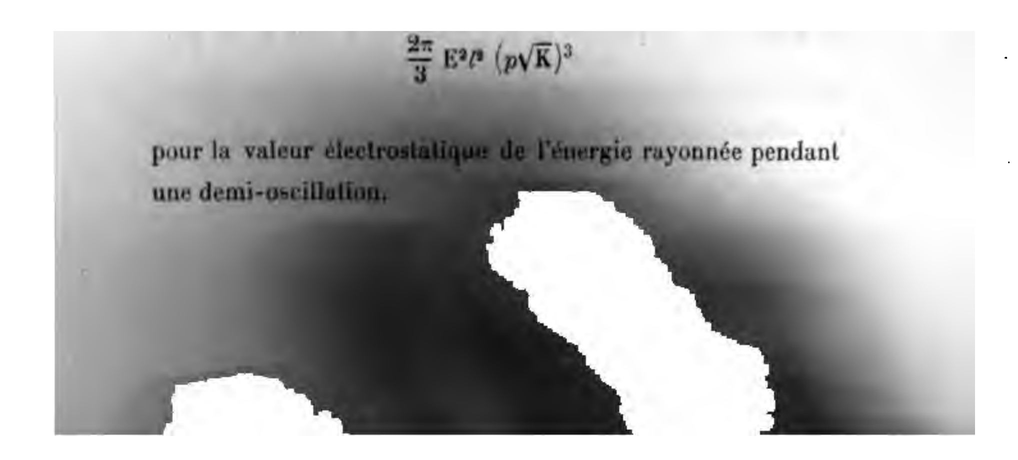
$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} p^2 \sqrt{K}.\Pi$$

Le déplacement électrique est égal à la force magnétique $\times \frac{K}{4\pi}$, dans le cas d'une onde plane. Cette relation, qui n'est plus rigoureuse ici, est encore exacte au degré d'approximation du calcul : car pour un point très éloigné, le déplacement est sensiblement dans le plan de l'onde. et l'onde est assimilable à une onde plane.

Le vecteur radiant étant le produit des deux autres vecteurs, divisé par K, a pour expression

$$\frac{K}{4\pi} \frac{x^2 + y^2}{r^2} p^4 \Pi^2$$

Hertz a calculé l'intégrale obtenue en multipliant par $d\omega$, et intégrant sur la surface de la sphère ; il a trouvé :



$$\frac{2\pi}{3} E^2 l^2 (p\sqrt{K})^3$$

pour la valeur électrostatique de l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation.

92. Réduisons en nombres : le rayon des sphères est 15, la longueur $l = 100$; la charge maximum atteinte par chacune des deux parties de l'excitateur était 60 unités, ce qui donne pour le potentiel maximun E_0, $E_0 = 60 \times 15 = 900$. On avait, d'après ces données, environ 2,400 unités C. G. S. d'énergie rayonnée par demi-oscillation ([1]).

L'énergie initiale, avant toute vibration, était.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \times 900 \times 60 = 54000 \text{ unités.}$$

Cela montre avec quelle rapidité les vibrations diminuent ; une partie de l'énergie est transformée en chaleur dans la résistance du fil de l'excitateur ; il y aurait environ 100 unités dépensées par ohm : pour une résistance qui a sensiblement 3 ohms, il y aura 300 unités : en tout 2,700 unités d'énergie perdues dans une demi-oscillation, c'est-à-dire $\frac{1}{20}$ de l'énergie potentielle initiale. On aurait une dizaine d'oscillations sensibles, à peine. Le décrément logarithmique est pourtant beaucoup plus faible que dans le cas de l'excitateur sphérique, ce qui ne doit pas nous surprendre, car nous avions en facteur p^2 dans le décrément relatif à l'excitateur sphérique, et la quantité d'énergie perdue par demi-oscillation est d'autant plus grande que la période est plus courte.

Mais il y a plus, je viens de donner les chiffres de Hertz ; il les a obtenus, en partant de la $\frac{1}{2}$ longueur d'onde 4m,80 qu'il avait trouvée d'une part par un calcul vicié, comme nous l'avons vu, par une erreur sur la capacité ; d'autre part par des expé-

([1]) Hertz. *Wied. Ann.* t. 35, p. 12.

riences directes. Si l'on venait à découvrir que ces expériences sont elles-mêmes sujettes à quelques causes d'erreur et à adopter la longueur d'onde corrigée $4^m,80 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$, la radiation pendant une demi oscillation serait de $2,400 \times 2\sqrt{2}$ unités et le nombre des oscillations sensibles que Hertz évalue approximativement à 10 ne serait plus que de $\frac{10}{2\sqrt{2}} = 3$ environ ; dans ces conditions d'ailleurs, le décrément logarithmique ne pouvant plus être regardé comme petit, il conviendrait de reprendre tout le calcul.

PROPAGATION D'UNE PERTURBATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN FIL MÉTALLIQUE RECTILIGNE

93. Les lacunes sont nombreuses et considérables dans l'œuvre de Hertz, et l'on est loin encore de la netteté qu'on désirerait y trouver. Un des points qui restent le plus obscurs est la question de la propagation des ondes dans un fil métallique; je vais exposer les expériences sans chercher à accumuler les conjectures, et à dissimuler mon embarras.

Prenons le fil métallique pour axe des x. La perturbation n'est pas localisée dans le fil; il y a dans le diélectrique des courants de déplacement qui doivent se propager avec la même vitesse que la perturbation produite au sein même du fil. Le champ étant de révolution, sa connaissance se ramène

à la détermination d'une fonction Π satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Pi = K \frac{d^2\Pi}{dt^2}$$

La perturbation étant supposée périodique et propagée avec une vitesse constante, Π est proportionnel à $\cos(mz - pt)$; comme Π n'est fonction que de z, t, et $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, il est nécessairement de la forme

$$(1) \qquad \Pi = \psi(\rho) \cos(mz - pt)$$

On a :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Pi}{dt^2} = -p^2\Pi \\ \dfrac{d^2\Pi}{dz^2} = -m^2\Pi \end{cases}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2} = \frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Pi}{d\rho} = (m^2 - Kp^2)\,\Pi$$

par suite, le facteur qui multiplie $\psi(\rho)$ étant indépendant de ρ :

$$(3) \qquad \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = (m^2 - Kp^2)\,\psi$$

Nous avons de plus, pour déterminer ψ, la condition que ψ s'annule pour $\rho = \infty$. Cette fonction se rattache aux fonctions de Bessel.

94. Soit le long de OZ une masse attirante telle que la quantité de matière comprise entre z' et $z' + dz'$ soit $\cos nz'.dz'$. Le potentiel sera

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nz'dz'}{r}$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

Je pose

$$z' = z + \zeta$$
$$r^2 = \rho^2 + \zeta^2$$

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nz + n\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}$$

$$= \cos nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\xi}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} - \sin nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}$$

La seconde intégrale est nulle, car r ne change pas par le changement de ζ en $-\zeta$; $\sin n\zeta$ changeant de signe, les éléments se détruisent deux à deux.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \theta(\rho)$$

est fonction seulement de ρ.

V étant un potentiel,

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{z\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\rho} - n^2 V = 0$$

θ ne différant de V que par un facteur indépendant de ρ, on a de [redacted]



o

Cette équation est identique à celle qui donne ψ, si l'on fait

$$n^2 = m^2 - Kp^2.$$

On a donc intégré l'équation (3), on doit prendre pour ψ l'intégrale qui s'annule à l'infini : θ satisfait à cette condition, donc $\psi = \theta$.

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}, \qquad \text{où} \qquad n = \sqrt{m^2 - Kp^2}.$$

Il est à remarquer que ψ, par suite H, ne s'annule pas pour de petites valeurs de ρ : en fait, il ne s'annule pour aucune valeur finie, mais ce qui importe c'est qu'il n'est pas nul pour ρ très petit. θ est en effet très grand ; le point attiré étant très-voisin de la matière attirante, le potentiel est très grand, il est de l'ordre de grandeur de $2\delta \log r$, δ étant la densité dans le voisinage et r la plus courte distance à la ligne attirante.

95. Nous déterminerons la vitesse de propagation par la condition que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface du fil conducteur. Il faut donc qu'à la surface $h = o$.

Or :

$$4\pi h = \frac{d^2 H}{dz^2} + Kp^2 H = (Kp^2 - m^2) H$$

H ne pouvant être nul à la surface, il faut nécessairement que :

$$Kp^2 - m^2 = o$$

$$\frac{p}{m} = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

La vitesse de propagation dans le fil est égale à la vitesse de la lumière et à la vitesse de propagation des ondes dans l'air. Un corollaire immédiat est que h est constamment nul ; les lignes de force électrique sont dans des plans perpendiculaires au fil.

La valeur de ψ dans ce cas est donnée par :

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = 0$$

d'où

$$\psi = \log \rho$$

Malheureusement les expériences faites sur cette question semblent donner des résultats contradictoires. Hertz a mesuré la vitesse de propagation dans un fil en faisant interférer l'onde directe avec l'onde réfléchie à l'extrémité du fil : alors que dans l'air, on aurait dans ces circonstances entre deux nœuds consécutifs une distance de 4^m^50, on trouve ici 2^m^80 ; le rapport $\frac{45}{28}$ est celui qui d'après les expériences de Hertz mesure le rapport de la vitesse de propagation dans l'air à la vitesse de propagation dans un fil métallique conducteur.

96. On ne peut pas expliquer cette divergence par l'existence de plusieurs harmoniques, et en disant que l'on a mesuré dans un des deux cas la longueur d'onde correspondante à un son plus haut que le fondamental. L'explication est insuffisante, car Hertz a obtenu simultanément ces deux vibrations, l'une dans l'air, l'autre dans le conducteur, et ces deux vibrations devaient être de même période *puisqu'il les a fait interférer*. La résistance du conducteur est sans effet, puisque Hertz a pris soin de montrer que la longueur d'onde

XXXIV, p. 556 et XXXVI, p. 17.

reste la même quand on change le diamètre et la nature du fil.

Faut-il donc admettre que la vitesse de propagation peut être différente dans le fil et dans l'air? On est tenté de le croire, si l'on observe qu'en faisant subir à la vitesse de propagation dans le fil la correction signalée plus haut, relative au calcul de la période (§ 70, p. 151 et § 75, p. 163), on trouve par cette vitesse le nombre $200.000 \times \sqrt{2} = 282.000$, nombre aussi voisin de la vitesse de la lumière que celui qu'ont donné les premières déterminations du rapport des unités. Or les vitesses dans le fil conducteur et dans l'air sont bien les mêmes, et leur valeur commune est bien celle de la vitesse de la lumière, quand on adopte la théorie de Maxwell, mais il n'en est pas ainsi dans toutes les théories. Les théories de Weber, de Neumann, et autres analogues, dans lesquelles $\lambda = K_0$, sont définitivement condamnées par les expériences de Hertz, qui établissent d'une façon indiscutable que les ondes électromagnétiques se propagent avec une vitesse finie, tandis que ces théories donnent pour la vitesse de propagation dans les diélectriques une valeur infinie. Ne devra-t-on pas recouvrir par conséquent à des théories intermédiaires, attribuant à la vitesse dans les diélectriques une valeur finie plus grande que celle de la lumière, et donnant une valeur voisine de la vitesse de la lumière à la vitesse dans les fils conducteurs? Il semble qu'on est en effet réduit à se tourner du côté de ces théories électrodynamiques nouvelles.

Cette nécessité serait cruelle, ce serait en effet renoncer à toute théorie électromagnétique de la lumière; mais en y regardant de près, nous verrons que ces électrodynamiques nouvelles rendent encore moins compte des faits que celles de Maxwell. Observons pour le moment qu'il y a encore,

dans cette question de la propagation dans un fil, bien des circonstances inconnues. Un savant viennois, M. Lecher, (1) a récemment obtenu, par une méthode nouvelle, une vitesse de propagation égale à celle de la lumière : il prend deux fils rectilignes parallèles, aux extrémités desquels sont deux récipients contenant des gaz raréfiés qui s'illuminent par la décharge ; en réunissant les deux fils par un pont mobile, et en faisant glisser ce pont, on constate des variations dans l'illumination des gaz raréfiés ; ces variations se reproduisent périodiquement quand le pont glisse d'un mouvement continu le long des fils rectilignes : de là une méthode pour mesurer la longueur d'onde. Ayant trouvé ainsi pour la vitesse de propagation dans un conducteur un nombre voisin de la vitesse de la lumière M. Lecher se croit en désaccord avec M. Hertz. Ainsi que nous venons de le voir ce désaccord n'est qu'apparent et disparaît dès qu'on corrige l'erreur de Hertz sur la capacité. Mais voilà que, d'autre part, Hertz a pu réduire la longueur d'onde à 30 centimètres en enroulant le fil en spirale. MM. Sarrazin et de la Rive ont obtenu d'autres longueurs d'onde avec des résonateurs différents : peut-être y a-t-il une série continue d'harmoniques formant comme un spectre. Ce qu'il y a de plus naturel, dans l'état actuel de la question, c'est de conserver la théorie de Maxwell, et de faire porter nos doutes sur la légitimité de l'application des conditions aux limites à la surface des conducteurs. On devrait alors cesser d'admettre que les lignes de force électrique sont normales aux conducteurs.

(1) *Sitzungsberichte der K. Acad. d. Wissenschaften in Wien.* Bd XCIX, Abth. II, April 1890. Voy. aussi *Wied. Ann.* t. XLI, p. 850 : *la Lumière électrique.* t. XXXIX, p. 89.

CHAPITRE X

LE RÉSONATEUR DE HERTZ

97. L'appareil à l'aide duquel Hertz explore le champ est un circuit métallique, en général circulaire, présentant en un point un interrupteur à étincelles. Comment se comporte-t-il dans un champ variable ?

Pour un point intérieur, on a $f = 0$;

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = 0 \tag{1}$$

Prenons pour origine le point considéré et pour axe des x la tangente au fil en ce point : $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{ds}$, s étant la longueur de l'axe du fil, comptée par exemple, à partir de l'interruption.

Dans l'expression de F, il faut distinguer plusieurs termes : l'un dû aux courants existant dans le champ, avant l'introduction du résonateur par le fait de l'excitateur primaire, soit F'; un autre dû aux courants secondaires produits par l'action perturbatrice du résonateur, dont la présence déforme

les lignes de force voisines, soit F''; un autre enfin, dû aux courants de conduction développés dans le résonateur même, soit F'''. De ces trois termes, le second F'' est absolument négligeable.

Le potentiel φ se composera de deux termes : φ' dû à l'action propre de l'excitateur, φ'' dû à l'électricité répandue sur la surface du résonateur.

L'équation (1) devient :

$$(2) \qquad \frac{dF'''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx} = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\varphi'}{dx}$$

Appelons X le second membre : c'est la force électrique due à l'excitateur, et existant dans le champ avant l'introduction du résonateur.

Négligeons la capacité des bornes de l'interrupteur. Si ρds est la quantité d'électricité répandue sur l'élément de longueur ds du fil, et si r est son rayon, supposé très petit, le potentiel φ'' en un point de son axe est sensiblement $\frac{2\rho}{K} \log r$; la valeur de F''', qui est le potentiel d'une matière attirante de densité u, est de même $2i \log r$ (1), en appelant i l'intensité

(1) En effet le diamètre du fil étant fort petit par rapport à sa longueur, la portion de ce fil voisine du point considéré peut être assimilée à un cylindre très délié. Les formules précédentes, ne sont pas homogènes car r qui entre sous le signe log est une longueur et non un nombre. Un calcul plus précis donnerait la formule suivante qui est homogène :

$$2i \log \frac{r}{L} + \text{des termes qui s'annulent avec } r.$$

L étant une longueur constante très grande par rapport à r. En négligeant les termes qui s'annulent avec r il reste

$$2i (\log r - \log L)$$

ou puisque log L est négligeable devant $\log r$:

$$2i \log r.$$

du courant. En effet le fil peut être assimilé à un cylindre très délié de sorte que le potentiel en un point extérieur est le même que si toute la masse attirante était concentrée sur l'axe de ce cylindre. Par suite ce potentiel a pour expression :

$$2 \log r \int u d\omega$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la section du fil. Mais au point considéré, la tangente ayant été momentanément prise pour axe des x, on a $v = w = 0$ d'où :

$$i = \int u d\omega.$$

De même en ce point on a $G''' = H''' = 0$, de sorte que si l'on convient d'appeler E le potentiel vecteur dont les composantes sont F''', G''' et H''', on aura :

$$E = F''' \text{ et } \frac{dE}{ds} = \frac{dF'''}{dx}$$

Et l'équation de continuité, qui se réduit ici à :

$$\frac{di}{ds} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

donne entre E et φ'' la relation :

$$(3) \qquad \frac{dE}{ds} + K \frac{d\varphi''}{dt} = 0$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{d\varphi''}{ds} = X$$



car

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi''}{dx}.$$

Éliminons E, en différentiant (2) par rapport à t, (3) par rapport à s, et retranchan cette équation (3) multipliée par $\frac{1}{K}$.

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{1}{K}\frac{d^2E}{ds^2} = \frac{dX}{dt}$$

Mais E est égal à i, au facteur contant près $2 \log r$; d'où, en posant

$$2 \log r = C$$

$$(4) \qquad \frac{d^2i}{ds^2} - K\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{K}{C}\frac{dX}{dt}$$

98. Supposons que X varie suivant une fonction sinusoïdale du temps : X est une fonction de l'arc s, comptée sur le fil du résonateur à partir de l'interrupteur, et peut être représentée par :

$$X = \cos pt \times \frac{C}{pK} \varphi(s)$$

Alors

$$-\frac{K}{C}\frac{dX}{dt} = \sin pt . \varphi(s)$$

$\varphi(s)$ est évidemment une fonction périodique de s, admettant pour période la longueur totale S du résonateur ; $\varphi(s)$ pourra donc se développer en série de Fourier :

$$\varphi(s) = A + B \cos ms + C \sin ms + \ldots..$$

en posant $m = \frac{2\pi}{S}$. Je ne conserve que ces trois termes : on n'aura évidemment qu'un résultat approché, mais nous n'en sommes pas à cela près.

Donc :

$$\frac{d^2 i}{ds^2} - K \frac{d^2 i}{dt^2} = \sin pt \, (A + B \cos ms + C \sin ms)$$

Intégrons :

$$(5) \qquad i = \sin pt \left(\frac{A}{-Kp^2} + \frac{B \cos ms + C \sin ms}{m^2 - Kp^2} \right)$$

sera la solution correspondante au régime permanent.

99. Discutons ce résultat ; faisons $s = 0$, c'est-à-dire plaçons-nous à l'interrupteur ; le courant en ce point P est mesuré par l'étincelle ; il est donné par :

$$(6) \qquad i = \sin pt \left(\frac{A}{-Kp^2} + \frac{B}{m^2 - Kp^2} \right)$$

la longueur maximum d'étincelle est proportionnelle à la quantité entre parenthèses : or considérons le point P′ diamétralement opposé à P ; en ce point $\sin ms = 0$, $\cos ms = -1$,

$$\varphi(s) = A - B.$$

La force électromotrice en P′ est donc proportionnelle à $A - B$. Si l'on supposait que $-Kp^2$ et $m^2 - Kp^2$ fussent égaux et de signes contraires, la parenthèse serait proportionnelle à $A - B$ et la longueur de l'étincelle mesurerait

bien la force électrique au point P′ diamétralement opposé. En fait, il n'y a aucune raison pour que les dénominateurs soient égaux, mais ils sont de signes contraires dans les expériences de Hertz, la parenthèse de l'équation (6) est donc proportionnelle à A — B $\times$ un certain coefficient.

Je ne trouve pas ici d'expression assez vague pour exprimer ma pensée; je pourrais dire que l'étincelle *a une tendance* à varier comme A — B. Hertz semble en effet se contenter de dire : plus l'étincelle sera forte en P, plus sera grande la force électrique en P′ [1].

Mais si les deux dénominateurs de la parenthèse (6) étaient de même signe, on aurait au contraire A + B $\times$ un coefficient, et l'étincelle tendrait à varier comme A + B, c'est-à-dire comme la force électrique au point P.

100. Outre cette absence de rigueur, il y a un reproche qu'on pourrait adresser à cette théorie : elle repose sur l'équation $F = \int \frac{u d\tau}{r}$ et suppose par conséquent que, dans le cas d'oscillations très rapides, la force électrique aboutit normalement aux conducteurs; et nous avons vu combien cette hypothèse est sujette à caution.

En y regardant d'un peu près, on voit que la théorie du résonateur ne serait pas changée, si l'on abandonnait cette hypothèse ; on aurait toujours au premier membre de l'équation (5) une expression linéaire aux dérivées partielles de i

(1) *Wied. Ann.*, t. XXXIV, p. 163. — Pour certaines positions particulières du résonateur l'on peut déduire, et Hertz déduit, en effet, des conséquences plus rigoureuses de l'étude de l'étincelle, mais dans le cas général son raisonnement revient bien à celui-là

par rapport à s et à t; et la forme de l'intégrale ne serait pas changée : seulement on aurait aux dénominateurs de la parenthèse de l'équation (6) des polynômes en m et en p, plus compliqués, ce qui n'empêcherait pas de répéter, sans y rien changer, la discussion grossière qui a été faite précédemment.

101. Hertz se borne en somme à une comparaison pour caractériser le rôle de son résonateur : il le compare à une corde vibrante qui serait fixée à ses deux extrémités, — ces extrémités correspondant aux deux bornes de l'interrupteur, — et qui oscillerait sous l'influence de forces périodiques. Cette comparaison est fort juste : elle traduit l'analyse précédente en langage ordinaire ; où il a tort, c'est quand il croit que les oscillations de la corde ont toujours lieu dans le même sens que la force qui les détermine : elles peuvent parfaitement être en sens contraire. Considérons un pendule, soumis à une force proportionnelle à $\sin pt$; soit θ l'angle, toujours très petit, du pendule avec sa position d'équilibre.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + m^2\theta = A \sin pt$$

m dépend uniquement de la période du pendule oscillant seul.

L'intégrale, pour le régime établi, est :

$$\frac{A \sin pt}{m^2 - p^2}$$

pour avoir l'intégrale générale, il suffirait d'ajouter

$$+ C \cos mt + C' \sin mt.$$



θ est-il toujours de même signe que sin pt ? Cela revient à demander si $\frac{A}{m^2 - p^2}$ est toujours de même signe que A. Si $m < p$, le déplacement et la force sont en sens contraires ; de même, dans le résonateur, tout dépend du signe de $m^2 - Kp^2$.



CHAPITRE XI

RÉFLEXION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

102. L'application de la théorie de Maxwell aux expériences de Hertz soulève des difficultés. Les théories intermédiaires entre l'ancienne électrodynamique et celle de Maxwell, et qui consistent à donner à λ une valeur comprise entre o et l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, ne rendent pas mieux compte des faits.

Dans un conducteur parfait — ou, ce qui revient au même, dans un conducteur ordinaire, si l'on suppose les oscillations extrêmement rapides — la force magnétique et le courant sont nuls à l'intérieur : il n'y a de courant qu'à la surface. La première de ces propositions — force magnétique nulle à l'intérieur — s'accorde avec toutes les théories ; il n'en est pas de même de la seconde ; on a en général :

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dx dt}$$

à l'intérieur du conducteur considéré, $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

reste

$$4\pi u = \lambda \frac{d^2\varphi}{dx dt}$$

pour Maxwell, $\lambda = 0$, d'où $u = 0$; mais si λ n'est pas nul, u ne l'est pas non plus en général.

Or l'un des faits expérimentaux les mieux prouvés est l'imperméabilité des conducteurs aux radiations électriques. Hertz l'a mis en évidence en faisant réfléchir les ondes électromagnétiques contre la surface d'une plaque métallique.

103. Considérons une plaque métallique, comprise entre les plans $x = 0$ et $x = h$. Imaginons une perturbation électromagnétique qui y arrive, se propageant en onde plane transversale : va-t-elle passer ?

Deux cas sont à distinguer :

1° La vibration électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, la force magnétique dans le plan d'incidence. Toutes les théories s'accordent à montrer que la vibration ne passera pas et que le potentiel électrostatique φ sera nul au-delà du plan $x = 0$;

2° La force magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence, le déplacement électrique lui est parallèle. C'est ce cas qui constitue l'*experimentum crucis*.

Prenons pour plan $z = 0$ le plan d'incidence

$$H = h = w = 0,$$

car le déplacement électrique, le courant et le potentiel vecteur sont dans le plan d'incidence; F, G, f, g, u, v, sont différents de 0 en général ; $\alpha = \beta = 0$, car la force magné- ... l'incidence ; $\gamma = 0$. La théorie

présente les plus grandes analogies avec la théorie optique de la réflexion et de la réfraction [1].

Je me servirai encore d'exponentielles imaginaires dont les parties réelles représenteront les quantités physiques qui interviennent. Je vais supposer toutes les fonctions à considérer, proportionnelles à une fonction de x, multipliée par $e^{i(by-pt)}$. Si je prends par exemple F, j'ai :

$$\frac{dF}{dz} = 0, \frac{dF}{dt} = -ipF, \frac{dF}{dy} = ibF$$

La fonction d'x est elle-même une somme d'exponentielles réelles ou imaginaires : on aura deux sortes de termes ; les uns de la forme :

$$(1) \qquad e^{i(ax+by-pt)}$$

les autres de la forme :

$$(2) \qquad e^{ax+i(by-pt)}$$

les premiers correspondant à une onde plane telle que l'équation du plan de l'onde soit $ax + by =$ constante, et se propageant avec une vitesse $\frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}$, vers la droite si $a > 0$, vers la gauche si $a < 0$; les seconds termes correspondant à un plan d'onde imaginaire, c'est-à-dire à un rayon évanescent.

104. Notre plaque conductrice arrêtant tout rayon électrique, quelle que soit sa conductibilité, on peut supposer cette

[1] *Théorie mathématique de la lumière*, § 208, p. 336.

conductibilité infinie : l'écran serait d'ailleurs d'autant plus imperméable que la conductibilité serait plus grande.

Avec cette hypothèse, nous trouvons, en éliminant tout, sauf γ :

$$(3) \qquad \Delta\gamma = (K - \lambda) \frac{d^2\gamma}{dt^2} \text{ (1)}$$

Il faudrait en réalité $\mu (K - \lambda)$; mais nous avons vu qu'on peut supposer, dans le cas d'oscillations très rapides, $\mu = 1$ pour tous les corps.

Pour le potentiel électrostatique φ, on aurait :

$$(4) \qquad \Delta\varphi = \frac{k\lambda (K - \lambda)}{K} \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

en fait, c'est seulement la dérivée par rapport au temps de la différence des deux membres de l'équation (4) qui est nulle : mais une fonction quelconque est égale au facteur près, $-ip$, à sa dérivée par rapport au temps; la fonction est donc nulle elle-même, et l'on a bien l'équation (4).

105. Or :

$$4\pi u = 4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$4\pi g = 4\pi \frac{dg}{dt} = -\frac{d\gamma}{dx} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dydt}$$

et dans le diélectrique, on a :

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}$$

(1) Voir p. 110, § 46.

d'où :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{4\pi \frac{df}{dt}}{K-\lambda} - \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$= -\frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dy} - \left(\frac{\lambda}{K-\lambda} + 1\right)\frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$(5) \qquad \frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{K}{K-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dxdt}.$$

De même :

$$(6) \qquad \frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dx} - \frac{K}{K-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

Que deviennent ces équations dans le conducteur ? On a, pour un point intérieur :

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = 0 ;$$

tout se passe donc comme si K était infini et les équations (5) et (6) deviennent :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$\frac{d^2G}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

106. Cherchons les valeurs de φ et de γ dans les trois régions.

L'équation (3) exprime que la force magnétique se propage avec la vitesse des vibrations dites transversales ; l'équation (4), que le potentiel électrostatique se propage avec la vitesse des vibrations longitudinales.

Remplaçons $\frac{d^2\gamma}{dy^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, ainsi que $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ par leurs valeurs en fonction de γ et de φ, il vient :

$$(7) \qquad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + [b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda)]\, \gamma = 0$$

$$(8) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left[b^2 - p^2 \frac{k\lambda\, (\mathrm{K} - \lambda)}{\mathrm{K}}\right] \varphi = 0$$

Posons :

$$b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda) = a^2$$

Les deux intégrales fondamentales de (7) sont e^{iax} et e^{-iax}.

Pour $x < 0$,

$$\gamma = \mathrm{A}e^{iax} + \mathrm{B}e^{-iax}$$

où A et B sont fonctions seulement de y et de t

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \quad e^{i(by-pt)}$$

A_0 étant une constante.

Pour $0 < x < \varepsilon$, $\gamma = 0$.

De l'autre côté de la plaque, pour $x > \varepsilon$, on aura :

$$\gamma = \mathrm{A}' e^{iax} + \mathrm{B}' e^{-iax},$$

où A′ et B′ sont des fonctions de même forme que A et B, mais ayant des valeurs différentes.

De même pour φ, posons :

$$b^2 - p^2 \frac{k\lambda\, (\mathrm{K} - \lambda)}{\mathrm{K}} = \pm c^2 \text{ (1)}$$

(1) Ici nous ne connaissons pas *a priori* le signe du premier membre et nous sommes obligés de mettre $\pm c^2$; précédemment nous avions toujours $b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda)$ positif, car l'onde transversale incidente que nous nous donnons a une vitesse toujours réelle.

Si c'est le signe + qui convient, l'intégrale générale de (8) est :

$$\varphi = Ce^{icx} + De^{-icx}.$$

Si c'est le signe —, l'intégrale est :

$$\varphi = Ce^{cx} + De^{-cx}$$

Dans le conducteur, entre les plans $x = o$ et $x = \varepsilon$, on a $K = \infty$, et le coefficient de φ dans l'équation (8) se réduit a :

$$b^2 - p^2 k\lambda = \pm d^2.$$

Et l'intégrale est :

$$\varphi = C'e^{idx} + D'e^{-idx}$$

ou

$$\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$$

suivant qu'il faut prendre $+ d^2$ ou $- d^2$.

Enfin pour $x > \varepsilon$, de l'autre côté de la plaque, on aura, suivant les cas :

$$\varphi = C''e^{icx} + D''e^{-icx}$$

ou :

$$\varphi = C''e^{cx} + D''e^{-cx}.$$

107. Les deux termes qui entrent dans l'expression de γ, pour $x < o$, correspondent : l'un, Ae^{iax}, au rayon incident, l'autre, Be^{-iax}, au rayon réfléchi : pour $x > \varepsilon$, on a encore deux termes : l'un $A'e^{iax}$ correspond au rayon réfracté, l'autre $B'e^{-iax}$ ne correspond à rien, par suite il doit être nul.

De même pour φ. Le facteur $b^2 - p^2 \frac{k\lambda (K - \lambda)}{K}$ étant

supposé d'abord positif, le premier terme Ce^{icx} correspond au rayon incident, le second, De^{-icx} au rayon réfléchi.

Supposons que nous ayons une onde transversale incidente : il n'y a pas d'onde longitudinale incidente, et le terme Ce^{icx} doit être nul ; mais il y aura en général une onde longitudinale réfléchie et une réfractée. Dans le conducteur, on aura les deux termes, car il y aura l'onde réfractée et l'onde réfléchie sur la seconde face. De l'autre côté du conducteur, on aura seulement le terme $C''e^{icx}$ correspondant à l'onde longitudinale réfractée.

Dans le cas où le facteur $b^2 - p^2 \frac{k\lambda\,(K - \lambda)}{K}$ serait négatif; on aurait, pour $x < 0$ seulement le terme Ce^{cx} (en prenant c positif); car le terme De^{-cx} deviendrait infini pour $x = -\infty$, il doit donc être nul.

Dans la plaque, les deux termes subsisteraient et, à la sortie, on aurait seulement le terme $D''e^{-cx}$ car le terme $C''e^{cx}$ deviendrait infini pour $x = +\infty$.

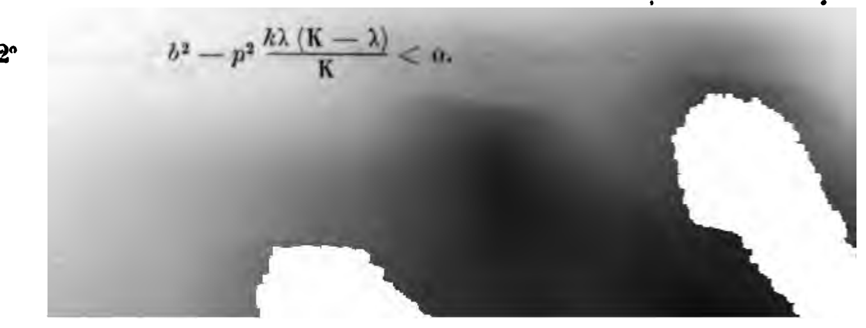
En résumé deux cas sont à distinguer :

1° $$b^2 - p^2 \frac{k\lambda\,(K - \lambda)}{K} > 0$$

On a alors :

	Ondes transversales	Ondes longitudinales
A gauche de la plaque	$\gamma = Ae^{iax} + Be^{-iax}$	$\varphi = De^{-icx}$
Dans la plaque	$\gamma = 0$	$\varphi = C'e^{idx} + D'e^{-idx}$
		ou $\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$
A droite de la plaque	$\gamma = A'e^{iax}$	$\varphi = C''e^{icx}$

2° $$b^2 - p^2 \frac{k\lambda\,(K - \lambda)}{K} < 0.$$



On a alors :

	Ondes transversales	Ondes longitudinales
A gauche de la plaque	$\gamma = Ae^{iax} + Be^{-iax}$	$\varphi = Ce^{cx}$
Dans la plaque	$\gamma = 0$	$\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$
A droite de la plaque	$\gamma = A'e^{iax}$	$\varphi = D''e^{-dx}$

On a d'ailleurs à droite de la plaque suivant les cas :

$$4\pi u = ibA'e^{iax} + \lambda C''cpe^{icx}$$

ou

$$4\pi u = ibA'e^{iax} + \lambda . D''cipe^{-cx}$$

108. Que faut-il pour qu'il n'y ait pas courant au-delà de la plaque ? Il faut que les valeurs obtenues pour u et v soient identiquement nulles. Nous allons montrer que, si l'on ne suppose pas $\lambda = 0$, on n'obtient ce résultat qu'en supposant nulle l'onde incidente.

Pour que le courant soit identiquement nul au-delà de la plaque, il faut que les coefficients A', C'' et D'' soient nuls ; dans la théorie de Maxwell on pourrait laisser C'' et D'' différents de o, car le terme en $\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$ s'annule sans qu'on ait besoin d'annuler φ. Observons maintenant que F, G et φ doivent être des fonctions continues.

Considérons le plan $x = \varepsilon$: en un point situé à droite, par conséquent au-delà de la plaque, on doit avoir $F = G = 0$; comme F et G sont continus, ils sont nuls aussi en un point très voisin du plan, mais situé à gauche.

Si F est nul, $\frac{d^2F}{dt^2} = -ipF$ est nul, donc $\frac{d^2\varphi}{dxdt} = 0$; car à l'in-

térieur de la plaque on a

$$\frac{dF}{dt}+\frac{d\varphi}{dx}=0$$

d'où

$$\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\varphi}{dxdt}=0$$

et $ip\frac{d\varphi}{dx}=0$. $\frac{d\varphi}{dx}$ est donc nul dans le conducteur au voisinage de la seconde surface.

On démontrerait de même que $\frac{d^2\varphi}{dydt}$ est nul. Donc $pb\varphi=0$, par suite $\varphi=0$. φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ étant nuls en un point du conducteur et φ étant une somme de deux exponentielles, les deux coefficients sont forcéments nuls. Ainsi φ est nul, comme γ, à l'intérieur du conducteur.

109. Raisonnons de même, en considérant la première surface $x=0$; pour un point infiniment voisin de la surface, mais à l'extérieur du conducteur, F et G sont nuls, puisqu'ils sont continus en traversant la surface : et qu'ils sont nuls dans le conducteur.

$\frac{d^2F}{dt^2}$ et $\frac{d^2G}{dt^2}$ sont nuls ; et φ doit être nul pour la même raison. On en peut conclure que $\frac{d\varphi}{dx}=0$, car $\varphi = Ce^{icx}$ ou Ce^{cx}, et $\frac{d\varphi}{dx}=ic\varphi$ ou $c\varphi$ suivant le cas.

$$\frac{d^2\varphi}{dydt}=-\,pb\varphi\;=0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dxdt}=-\,ip\frac{d\varphi}{dx}=0$$

Nous avons donc :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2G}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dxdt} = \frac{d^2\varphi}{dydt} = 0$$

et si l'on compare avec les équations (5) et (6) il vient $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dy} = 0$; d'où $\gamma = 0$; et γ étant une somme de deux exponentielles, γ et $\frac{d\gamma}{dx}$ ne peuvent être simultanément nuls qu'autant que les deux coefficients sont nuls. γ est donc identiquement nul. Il faut donc, pour n'avoir aucune onde réfractée passant à travers la plaque, supprimer l'onde incidente. Une onde transversale incidente quelconque passera toujours à travers la plaque à moins que $\lambda = 0$.

110. Ne pourrait-on pas dire toutefois : Mais nous avons à l'intérieur du conducteur

$$\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$$

si d était très grand, C' étant très petit, le terme $D'e^{-dx}$ donnerait un potentiel sensible dans le voisinage de la première surface, mais qui s'éteindrait au voisinage de la seconde. Cette hypothèse est à rejeter ; en effet K étant essentiellement positif, ainsi que λ, d est $< b$, et b est comparable à l'inverse de la longueur d'onde : il faudrait, pour que le potentiel fût insensible à la seconde surface, avoir des plaques d'une épaisseur notablement plus grande que la longueur d'onde, et celle-ci est de l'ordre de 10 mètres : or les expériences ont porté sur des plaques de quelques millimètres à peine.

111. Les expériences de Hertz condamnent donc l'électrodynamique ancienne et les théories intermédiaires. Reste la théorie de Maxwell; il est peu probable, quoique le contraire ne soit pas prouvé, qu'elle arrive à rendre compte de tout; il faudra sans doute la modifier; mais on n'aura vraisemblablement qu'à la modifier sans changer le point essentiel, c'est-à-dire qu'on conservera les deux systèmes d'équations :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right)$$

$$4\pi\frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

Tout le reste, en effet, ne constitue que des hypothèses secondaires, auxquelles on peut renoncer. L'une de ces hypothèses, nous l'avons déjà dit, est celle qui fait aboutir les lignes de force électrique normalement à la surface des conducteurs. On a en somme une réflexion métallique des ondes électromagnétiques à la surface des conducteurs, et M. Potier a remarqué que la théorie de Maxwell, appliquée à l'optique, ne rend pas bien compte de la réflexion métallique. Depuis longtemps, en tous cas, l'on sait que la théorie de Maxwell n'est qu'une première approximation, bonne tout au plus pour le vide, car elle ne rend pas compte de la dispersion.

112. Comment se fait-il que nous puissions si facilement faire bon marché de l'hypothèse des lignes de force électrique normales aux conducteurs? C'est que nous nous sommes

appuyés sur ce qu'on avait

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

mais cette dernière égalité n'est pas elle-même si évidente.

Posons :

$$F' = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

Nous avons bien

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \int (F' dx + G' dy + H' dz)$$

si l'intégrale est étendue à un contour fermé quelconque ; et, dans Helmholtz, l'égalité est établie pour un contour quelconque, même non fermé : alors l'identité $F = F'$, $G = G'$, $H = H'$, en résulte immédiatement. Mais, en partant des hypothèses de Maxwell, nous n'avons le droit d'écrire cette identité que pour une ligne fermée ; et elle prouve seulement que la différence des deux éléments différentiels est une différentielle exacte. On a :

$$F = F' + \frac{d\chi}{dx}$$

$$G = G' + \frac{d\chi}{dy}$$

$$H = H' + \frac{d\chi}{dz}$$

χ étant une fonction arbitraire. Telles sont en effet les

formules auxquelles on est conduit quand on ne passe pas par la théorie de Helmholtz. La fonction χ ne jouant aucun rôle dans les phénomènes electrodynamiques ordinaires, Maxwell fait arbitrairement $\chi = 0$; mais, et il le dit expressément, cette hypothèse ne s'impose pas à lui [1].

[1] Voir Chapitre XII, Note 2.

CHAPITRE XII

NOTES ET COMPLÉMENTS

Je crois devoir ajouter aux chapitres précédents, qui contiennent mes leçons du second semestre 1890, quelques notes complémentaires, portant sur des points que je n'ai pu développer dans mon cours faute de temps, ou devenues nécessaires par suite des progrès de la science.

NOTE I

LA THÉORIE DE HELMHOLTZ ET LE PRINCIPE DE NEWTON

Admettant le principe de « l'unité de la force électrique », j'ai montré plus haut que l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables doit être la même que celle des deux feuillets électriques équivalents, ou bien encore qu'elle doit être la même que l'action d'un des solénoïdes sur le feuillet électrique équivalent à l'autre.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie, j'ai calculé l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables de même que celle de deux feuillets électriques et j'ai montré ainsi que la théorie de Maxwell est seule compatible avec le postulat de l'unité de la force électrique.

On peut se proposer de calculer par une méthode analogue l'action d'un feuillet électrique sur un solénoïde variable ; on ne tarde pas alors à s'apercevoir que le principe de la conservation de l'énergie doit être appliqué avec une grande attention si l'on ne veut pas oublier des termes importants et qu'en particulier il faut tenir compte des actions électrodynamiques des courants de convection.

Mais lors même qu'on prend ces précautions on arrive à des résultats contradictoires suivant qu'on suppose le feuillet fixe et le solénoïde mobile, ou inversement le solénoïde mobile et le feuillet fixe. On est ainsi conduit à conclure que *les hypothèses fondamentales de la théorie de Helmholtz sont incompatibles avec l'égalité de l'action et de la réaction.*

C'est ce qu'il est aisé de vérifier directement.

L'énergie électrodynamique T nous est donnée en effet par l'intégrale suivante, en supposant par exemple $k = 1$ (théorie de Neumann)

$$T = \frac{1}{2} \int \int \frac{uu' + vv' + ww'}{r} \, d\tau d\tau'$$

l'intégrale double étant étendue à tous les éléments $d\tau$ et $d\tau'$ du volume des corps parcourus par les courants.

Imaginons maintenant que ces corps, au lieu d'être immobiles, soient animés d'un même mouvement de translation

dont la vitesse ξ est parallèle à l'axe des x. Nous aurons alors en chaque point, outre le courant de conduction (ou de déplacement), un courant de convection dont les composantes seront :

$$\rho\xi, \ 0, \ 0$$

de sorte que l'expression de T deviendra :

$$\frac{1}{2}\int\int\frac{(u+\rho\xi)(u'+\rho'\xi)+vv'+ww'}{r}d\tau d\tau'.$$

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction exigerait que cette expression fût égale à la somme de deux termes, le premier indépendant de ξ, le second ne dépendant que de ξ ; c'est-à-dire que l'intégrale :

$$\int\int\frac{u\rho'+u'\rho}{r}d\tau d\tau'$$

devrait être nulle.

Les fonctions u et ρ étant entièrement arbitraires, il est clair qu'il n'en est pas ainsi en général.

Si k n'est pas égal à 1, il faut ajouter à l'expression de T l'intégrale suivante :

$$\frac{1-k}{2}\int\int r\,\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho'}{dt}d\tau d\tau'$$

qui devient si les conducteurs sont mobiles :

$$\frac{1-k}{2}\int\int r\left(\frac{d\rho}{dt}-\frac{d\rho}{dx}\xi\right)\left(\frac{d\rho'}{dt}-\frac{d\rho'}{dx'}\xi\right)d\tau d\tau'.$$

Si donc le principe de Newton était applicable, le coefficient de ξ dans l'expression de T devrait être nul, c'est-à-dire qu'on devrait avoir :

$$\int\int\left[\frac{u\rho' + u'\rho}{r} - \frac{r}{2}(1-k)\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho'}{dt} + \frac{d\rho}{dr}\frac{d\rho'}{dx'}\right)\right] d\tau d\tau' = 0.$$

Il est manifeste que cette condition n'est pas remplie et que *la théorie de Helmholtz ne peut se concilier avec le principe de Newton qu'en subissant des modifications convenables.*

Il est cependant un cas particulier où cette difficulté ne se présenterait pas, c'est précisément celui de la théorie de Maxwell où

$$\rho = \rho' = 0.$$

Quand on est arrivé à cette conclusion, on ne peut s'empêcher de faire une remarque. Nous avons dit que la théorie de Weber n'est qu'un cas particulier de celle de Helmholtz et cependant cette théorie ne peut être en désacord avec le principe de Newton, puisqu'elle repose sur cette hypothèse que l'action mutuelle de deux molécules électriques dépend seulement de leur distance et de leur mouvement relatif.

Comment concilier cette apparente contradiction ?

Pour cela je n'ai qu'à rappeler ce fait. Pour faire concorder la théorie de Weber avec celle de Helmholtz nous avons dû faire certaines hypothèses que nous avons exprimées au § 15 par les équations suivantes p. 36 :

$$ev^2 + e_1 v_1^2 = 0, \qquad e'v'^2 + e'_1 v'^2_1 = 0$$

Ces relations ne peuvent être satisfaites rigoureusement surtout s'il y a des courants de convection, mais ainsi que je

Si l'on suppose comme nous l'avons fait :

$$e + e_1 = e' + e'_1 = ev^2 + e_1 v_1^2 = e'v'^2 + e'_1 v'^2_1 = 0$$
$$ev + e_1 v_1 = cids \qquad e'v' + e'_1 v'_1 = ci'ds'$$

les termes indépendants de v et de v' disparaissent ainsi que les termes en v, v', v^2, v'^2, et il reste :

$$\frac{ii'dsds'}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}$$

ce qui est l'expression de Helmholtz pour $k = -1$.

Considérons maintenant l'action d'une charge électrique mobile envisagée comme un courant de convection sur un élément de courant mobile ds.

Soit v' la vitesse du conducteur mobile qui porte la charge électrique e'. Je désignerai par ds' l'élément d'arc de la trajectoire de cette charge mobile.

La formule :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt} + v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'}$$

est encore applicable, à la condition que $\frac{dr}{dt}$ représente la partie de la variation de r qui est due au déplacement *absolu* du courant mobile et non à son déplacement *relatif* par rapport à la charge mobile, puisque nous avons déjà tenu compte du déplacement de cette charge par le terme $v' \frac{dr}{ds'}$.

On aura encore

$$e + e_1 = ev^2 + e_1 v_1^2 = 0 \qquad ev + e_1 v_1 = cids$$

mais on n'aura plus

$$e' + e'_1 = e'v'^2 + e'_1 v'^2_1 = 0.$$

Les termes indépendants de v et de v' disparaîtront donc ainsi que les termes en v', en v^2 et en v'^2, mais les termes en v ne disparaîtront plus et l'on aura :

$$T = \frac{e'i}{cr}\frac{dr}{ds}\left(\frac{dr}{dt} + v'\frac{dr}{ds'}\right).$$

La formule de Helmholtz donnerait :

$$T = \frac{e'i}{cr}\frac{dr}{ds}\left(v'\frac{dr}{ds'}\right).$$

A la vérité le terme négligé est très-petit (à cause du dénominateur c), mais dans l'espèce il en est de même du terme conservé, puisque v' est du même ordre de grandeur que $\frac{dr}{dt}$.

Maintenant le principe de Newton exige que T dépende seulement du déplacement *relatif* du conducteur mobile siège du courant, par rapport au conducteur mobile siège de la charge e' ; c'est-à-dire de $\frac{dr}{dt} + v'\frac{dr}{ds'}$. La formule de Helmholtz est donc inconciliable avec ce principe ; la formule de Weber *complète* peut seule s'accorder avec lui.

Ainsi la théorie de Helmholtz que son auteur a établie seulement, comme l'indique le titre de son ouvrage : « pour les conducteurs en repos, » doit subir des modifications importantes quand les conducteurs sont en mouvement.

Revenons maintenant à la question dont j'ai parlé au début de cette note, je veux dire à l'action d'un solénoïde fermé va-

riable sur un feuillet électrique. Si l'on calcule cette action à l'aide de la formule de Weber complète on arrive à un résultat conforme au principe de « l'unité de la force électrique ». Il n'en est plus de même si on applique cette même formule de Weber à l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables.

Cette action ainsi calculée est nulle comme avec la formule de Helmholtz. La conclusion du chapitre n'est donc pas modifiée et la théorie de Maxwell reste seule compatible avec « l'unité de la force électrique ».

Pour les considérations qui précèdent nous nous sommes placés au point de vue de la théorie de Weber, c'est-à-dire que nous avons supposé $k = -1$. On aurait pu arriver à des résultats analogues avec une valeur quelconque de k.

Helmholtz a fait voir en effet qu'on peut retrouver son expression du potentiel élémentaire (k étant quelconque) en partant d'une formule d'attraction analogue à celle de Weber, mais où entrent non seulement r et ses deux premières dérivées par rapport à t, mais encore la dérivée troisième.

NOTE II

SUR LA DÉMONSTRATION DE CE FAIT QUE LA FORCE ÉLECTRIQUE EST NORMALE AUX CONDUCTEURS

La théorie de Maxwell entraine-t-elle comme conséquence nécessaire que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs, si ces conducteurs sont parfaits ou si les oscillations sont très rapides? Tout dépend de la façon dont cette théorie est comprise ; au § 112 je me suis placé à un certain point de vue et j'ai montré que cette conséquence ne s'imposait pas. Mais plaçons-nous à un point de vue différent, plus conforme peut-être à la véritable pensée de Maxwell et nous arriverons à un résultat opposé.

Nous supposerons pour simplifier que l'on ait affaire à un système de conducteurs *parfaits* séparés les uns des autres par un diélectrique unique, par exemple par l'air. Nous avons le droit de considérer les conducteurs comme parfaits, puisque nous savons que, dans le cas d'oscillations très rapides, tous les conducteurs se comportent comme s'ils étaient parfaits.

L'énergie électrostatique est égale à :

$$U = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

et l'énergie électromagnétique à

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau$$

si l'on suppose $\mu = 1$.

La première intégrale doit être étendue au volume du diélectrique et la seconde à l'espace entier.

On a d'autre part :

$$4\pi u = 4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

$$4\pi v = 4\pi \frac{dg}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}$$

$$4\pi w = 4\pi \frac{dh}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Posons :

$$\alpha = \frac{dX}{dt}, \qquad \beta = \frac{dY}{dt}, \qquad \gamma = \frac{dZ}{dt},$$

et supposons qu'à l'origine des temps tout soit au repos et qu'on ait :

$$X = Y = Z = f = g = h = 0$$

il viendra [1] :

$$4\pi f = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$4\pi g = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dy}$$

$$4\pi h = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

[1] Cette analyse ne s'applique qu'aux cas où la charge électrostatique totale de tous les conducteurs est nulle.

et :

$$U = \int \frac{2\pi}{K} \sum f^2 d\tau = \int \frac{1}{8\pi K} \sum \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)^2 d\tau$$

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \sum \alpha^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \sum \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 d\tau.$$

Les conducteurs étant parfaits, il n'y a pas de résistance passive ni de production de chaleur et nous pouvons appliquer le *principe de moindre action* de Hamilton sans faire intervenir le travail de ces résistances passives, ce qui compliquerait beaucoup les calculs.

Dans les idées de Maxwell, l'énergie électromagnétique T n'est autre chose que la force vive de l'éther et l'énergie électrostatique U est l'énergie potentielle de l'éther (voir 1er volume, § 152, page 168).

L'action hamiltonnienne est donc représentée par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

prise par rapport au temps entre deux limites quelconques.

La variation :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U)\, dt$$

doit donc être nulle *pourvu que l'on ait*

$$\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$$

pour $t = t_0$ *et pour* $t = t_1$.

On sait en effet que le théorème de Hamilton consiste en ceci que l'action est minimum quand les coordonnées des divers points du système ont des valeurs données pour $t = t_0$ et pour $t = t_0$.

Or dans les idées de Maxwell, les coordonnées des diverses molécules d'éther dépendent de X, Y, Z ; ainsi les valeurs de X, Y, Z pour $t = t_0$ et $t = t_1$ doivent être considérées comme des données de la question et, par conséquent, leurs variations doivent être regardées comme nulles.

On a alors en intégrant par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\alpha \delta \frac{dX}{dt}\right) dt$$

$$= \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[\sum \alpha \delta X\right]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{d\alpha}{dt} \delta X\right) dt$$

Comme δX est nul pour $t = t_0$ et $t = t_1$, il reste

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = -\int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{d\alpha}{dt} \delta X\right) dt.$$

Nous avons d'autre part :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{4\pi dt}{K} \int \sum f \delta f d\tau$$

l'intégration étant étendue au volume du diélectrique.

Il vient

$$4\pi \int \sum f \delta f d\tau = \int \sum f \left(\frac{d\delta Z}{dy} - \frac{d\delta Y}{dz}\right) d\tau.$$

Or, en appliquant le procédé de l'intégration par parties, on trouve :

$$\int f\frac{d\delta Z}{dy}\,d\tau = \int mf\delta Z d\omega - \int \delta Z\,\frac{df}{dy}\,d\tau$$

L'intégrale du premier membre et la seconde du second membre sont étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ du diélectrique. Quant à la première intégrale du second membre, elle est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui sépare le diélectrique des conducteurs; enfin l, m, n sont les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$.

On trouverait de même :

$$\int f\frac{d\delta Y}{dz}\,d\tau = \int nf\delta Y d\omega - \int \delta Y\,\frac{df}{dz}\,d\tau.$$

On a donc :

$$K\delta U = \int\sum(mf\delta Z - nf\delta Y)\delta\omega - \int\sum\left(\delta Z\,\frac{df}{dy} - \delta Y\frac{df}{dz}\right)d\tau.$$

Il revient au même d'écrire :

$$K\delta U = \int\sum\,[\delta X(ng - mh)]\,d\omega - \int\sum\left[\delta X\left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right)\right]d\tau.$$

L'équation de Hamilton (qui exprime que la variation de l'action est nulle) peut donc s'écrire, en la multipliant par $4\pi K$, en désignant pour abréger par H_1, H_2 et H_3 trois intégrales que je vais définir :

$$\int_{t_0}^{t_1}(H_1 + H_2 + H_3)\,dt = 0.$$

Je pose :

$$H_1 = K\int d\tau \sum \left(\delta X \frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$H_2 = 4\pi \int d\omega \sum \delta X \,(ng - mh)$$

$$H_3 = 4\pi \int d\tau \sum \delta X \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right)$$

L'intégrale H_1 est étendue à l'espace tout entier, l'intégrale H_2 à la surface des conducteurs, et l'intégrale H_3 au diélectrique.

Comme cette relation doit être satisfaite quelles que soient les variations δX, δY et δZ, d'après les règles du calcul des variations on doit avoir pour toutes les valeurs du temps

$$H_1 + H_2 + H_3 = 0$$

et cela quelles que soient les variations δX, δY, δZ.

Posons alors :

$$H_1 = H_1' + H_1''$$

H_1' et H_1'' représentant la même intégrale que H_1, étendue pour H_1' au volume des conducteurs et pour H_1'' au volume du diélectrique.

Comme δX, δY et δZ sont arbitraires, on devra avoir séparément d'après les règles du calcul des variations :

$$H_1' = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_1'' + H_3 = 0.$$

Donc, on aura, toujours d'après ces mêmes règles :

1° A l'intérieur des conducteurs : (parce que $H_1' = 0$) $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ou puisque tout est au repos à l'origine des temps :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \qquad u = v = w = 0.$$

Il n'y a pas de courant à l'intérieur des conducteurs :

2° A l'intérieur des diélectriques (parce que $H_1'' + H_3 = 0$) :

$$K \frac{d\alpha}{dt} = 4\pi \left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy} \right)$$

C'est l'équation (3) du § 50, p. 115;

3° A la surface de séparation (parce que $H_2 = 0$)

$$ng - mh = 0$$

et de même

$$nf - lh = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f}{l} = \frac{g}{m} = \frac{h}{n}$$

ce qui exprime que les lignes de force électrique sont normales à la surface des conducteurs.

NOTE III

SUR LE CALCUL DE LA PÉRIODE

Les incertitudes qui subsistent au sujet du calcul de la période, et sur lesquelles j'ai insisté à la fin du cours, montrent assez quel intérêt il y aurait à posséder une méthode qui permettrait de calculer rigoureusement la période d'un excitateur donné. L'importance du sujet m'engage à publier les résultats que j'ai obtenus dans cet ordre d'idées, quelque incomplets qu'ils soient.

Le problème à résoudre peut s'énoncer comme il suit :

Trouver un nombre μ, et six fonctions X, Y, Z, L, M, N des trois coordonnées x, y, et z qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° Ces six fonctions sont analytiques en tous les points de l'espace occupé par le diélectrique ;

2° Si cet espace s'étend à l'infini, ces six fonctions doivent s'annuler à l'infini ;

3° En tous les points du diélectrique elles doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, & K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ Y &= \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, & K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ Z &= \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, & K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0.$$

4° A la surface des conducteurs et en particulier de l'excitateur, le vecteur dont les composantes sont X, Y, Z est normal à cette surface.

Le nombre μ et nos six fonctions peuvent d'ailleurs être soit réels, soit imaginaires. Cela posé, si l'on fait :

$4\pi f$ = partie réelle de $e^{i\mu t}X$, α = partie réelle de $i\mu e^{i\mu t}L$
$4\pi g$ = partie réelle de $e^{i\mu t}Y$, β = partie réelle de $i\mu e^{i\mu t}M$
$4\pi h$ = partie réelle de $e^{i\mu t}Z$, γ = partie réelle de $i\mu e^{i\mu t}N$

le déplacement électrique (f, g, h) et la force magnétique (α, β, γ) satisferont aux équations de Maxwell. On aura ainsi défini une perturbation électromagnétique périodique compatible avec ces équations.

La période sera égale à 2π divisé par la partie réelle de μ.

Si le nombre μ est réel, l'amplitude des oscillations est constante.

Si le nombre μ est imaginaire, cette amplitude décroît suivant une loi exponentielle ; il y a un *décrément logarithmique* dépendant de la partie imaginaire de μ.

Cela posé deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien l'excitateur est placé dans une chambre entièrement close à parois conductrices de sorte que l'espace occupé par le diélectrique est fini ;

2° Ou bien l'excitateur est placé dans un espace indéfini occupé par le diélectrique.

Le premier cas est beaucoup plus simple. Malheureusement

c'est le second qui a été réalisé dans les expériences; les salles où on opérait étaient assez grandes par rapport aux dimensions de l'excitateur pour pouvoir être assimilées à un espace indéfini. Je reviendrai sur ce point dans un instant.

Les différences entre les deux cas sont très grandes.

Dans le premier cas, l'énergie ne peut se dissiper au dehors par rayonnement; l'amplitude des oscillations est donc constante et μ est réel.

Dans le second cas, au contraire, il y a rayonnement et, par conséquent il y a un décrément logarithmique et μ est imaginaire.

Dans le premier cas, μ étant réel, on peut toujours supposer que les six fonctions sont également réelles; car si six fonctions imaginaires satisfaisaient aux équations (1), il en serait de même de leurs parties réelles.

Si les six fonctions sont réelles, cela signifie que la *phase* est la même en tous les points du diélectrique.

Au contraire dans le second cas la phase est différente aux divers points du diélectrique et les six fonctions sont imaginaires.

D'ailleurs une comparaison simple permet de se rendre compte de ce fait. Si un diapason vibre dans une atmosphère indéfinie, le son se propagera dans toutes les directions avec une vitesse déterminée et la phase ne sera pas la même aux divers points de cette atmosphère mais dépendra de la distance au diapason.

Si au contraire ce diapason vibre dans un espace clos, par exemple dans l'espace compris entre deux plans parallèles le son se réfléchira sur ces deux plans, et les ondes réfléchies interféreront de manière à produire des nœuds et des ventres

ou ce qu'on appelle un système d'*ondes stationnaires*. La phase sera la même en tous les points.

Cet état définitif où les ondes sont stationnaires ne peut s'établir bien entendu qu'au bout d'un certain temps; car il faut que le son émané du diapason (ou, dans le cas qui nous occupe, la perturbation émanée de l'excitateur) ait eu le temps de se propager jusqu'à la paroi réfléchissante. Il faut ensuite, pour que les ondes stationnaires soient appréciables, que la perturbation ne soit pas, avant d'atteindre la paroi réfléchissante, assez affaiblie par le rayonnement pour devenir insensible. C'est pour cette raison que si la salle où on opère est très grande, tout se passe comme si l'on était placé dans un espace indéfini. C'est donc le second cas qui est réalisé dans les expériences et qui est, par conséquent, de beaucoup le plus intéressant. C'est malheureusement au premier cas que j'ai dû me borner.

Considérons donc une chambre close limitée intérieurement par la surface de l'excitateur, extérieurement par des parois conductrices qui, au point de vue analytique, joueront le même rôle que cette surface, et remplie par un diélectrique.

Soient L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement aux conditions suivantes que j'appellerai les conditions (2) :

1° Elles sont analytiques et uniformes dans tout le diélectrique ;

2° On a dans le diélectrique

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0\,;$$

3° Le vecteur (L, M, N) en tous les points de la surface des conducteurs est normal à cette surface ;

4° L'intégrale :

$$T = \int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau$$

étendue au diélectrique entier est égale à 1.

Cela posé, envisageons l'intégrale :

$$U = \int \left[\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right)^2 \right] d\tau$$

Cette intégrale ne peut s'annuler. En effet, si elle s'annulait on aurait :

$$\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dz}, \qquad \frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}, \qquad \frac{dM}{dx} = \frac{dL}{dy}$$

et par conséquent :

$$L dx + M dy + N dz = d\varphi$$

$d\varphi$ étant la différentielle exacte d'une fonction φ qui doit être uniforme puisque les fonctions L, M, N le sont (cette dernière partie de la démonstration suppose que la chambre est un « espace simplement connexe », c'est-à-dire n'a pas, par exemple la forme d'un tore). On a donc

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad M = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad N = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Les conditions (2) signifient alors que $\Delta\varphi$ est nul en tous les points du diélectrique et $\frac{d\varphi}{dn}$ nul en tous les points de la surface qui le limite. Mais cela ne peut avoir lieu que si φ est une constante, c'est-à-dire si

$$L = M = N = 0.$$

Il est aisé de voir que cela est impossible puisque $T = 1$.

L'intégrale U, ne pouvant s'annuler, admet un minimum. Il existe donc trois fonctions L, M, N pour lesquelles ce minimum est atteint.

Ces fonctions doivent être telles que $\delta U = 0$, toutes les fois que $\delta T = 0$; que :

$$(3) \qquad \frac{d\delta L}{dx} + \frac{d\delta M}{dy} + \frac{d\delta N}{dz} = \sum \frac{d\delta L}{dx} = 0$$

et que le vecteur (δL, δM, δN) est tangent à la surface des conducteurs en tous les points de cette surface.

Cette dernière condition s'exprime par l'équation :

$$(4) \qquad l\delta L + m\delta M + n\delta N = \sum l\delta L = 0.$$

Posons pour abréger :

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \quad Y = \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \quad Z = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Il viendra :

$$\delta T = 2 \int (L\delta L + M\delta M + N\delta N)\, d\tau$$

$$\delta U = 2 \int (X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z)\, d\tau.$$

La valeur de δU peut être transformée par l'intégration par parties ; on trouve :

$$\int X\delta X d\tau = \int X\,(m\delta N - n\delta M)\, d\omega - \int \left(\delta N \frac{dX}{dy} - \delta M \frac{dX}{dz}\right) d\tau$$

de sorte que la condition $\delta U = o$ peut s'écrire :

$$\frac{\delta U}{2} = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ \delta L & \delta M & \delta N \end{vmatrix} d\omega - \int \sum \left[\delta L\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right)\right] d\tau = o$$

Cette condition doit être remplie quelles que soient les variations δL, δM, δN, pourvu qu'elles satisfassent aux relations (3) et (4) et à la relation $\delta T = o$.

Le calcul des variations nous permet d'en conclure ce qui suit :

On peut trouver un nombre $K\mu^2$ et deux fonctions φ et ψ telles que la condition :

$$(5) \quad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2}\delta T + \int \varphi \sum \left(\frac{d\delta L}{dx}\right) d\tau + \int \psi \sum (l\delta L)\, d\omega = o$$

soit remplie quand les variations δL, δM et δN sont *absolument quelconques*. Nous transformerons encore l'une de ces intégrales par l'intégration par parties en écrivant :

$$\int \varphi \sum \left(\frac{d\delta L}{dx}\right) d\tau = \int \varphi \sum (l\delta L)\, d\omega - \int \sum \left(\delta L \frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau.$$

L'équation (5) peut alors s'écrire ;

$$\int d\tau \sum \left[\delta L\left(\frac{dZ}{dz} - \frac{dY}{dx} - K\mu^2 L - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right] +$$

$$+ \int d\omega\, [\delta L\, (Yn - Zm + [\varphi + \psi]\, l)] = o.$$

On doit donc avoir dans tous les points du diélectrique

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} \\
K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \\
K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} - \frac{d\varphi}{dz}
\end{aligned}
$$

et en tous les points de la surface des conducteurs :

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
Zm - Yn &= l\,(\varphi + \psi) \\
Xn - Zl &= m\,(\varphi + \psi) \\
Yl - Xm &= n\,(\varphi + \psi)
\end{aligned}
$$

Si l'on ajoute les trois équations (7) après les avoir respectivement multipliées par l, m, n, il vient :

$$(l^2 + m^2 + n^2)\,(\varphi + \psi) = 0$$

Donc $\varphi + \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et on a :

$$(8) \qquad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

ce qui est une des conditions que nous nous sommes imposées.

On peut en tirer la conséquence suivante :

Envisageons l'intégrale

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \int \sum Xdx$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque tracée sur la

surface des conducteurs. Cette intégrale est nulle puisque le vecteur X, Y, Z est normal au conducteur, ce qui est exprimé par l'équation (8). Si nous transformons cette intégrale simple en intégrale double par la formule connue, il vient :

$$\int \sum l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) d\omega = 0$$

et comme cela a lieu pour un contour formé quelconque :

$$(9) \qquad \sum l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) = 0$$

Ajoutons les équations (6) après les avoir différentiées par rapport à x, y et z, il vient

$$K\mu^2 \sum \frac{dL}{dx} = -\Delta\varphi.$$

Mais on a par hypothèse :

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

Il reste donc :

$$\Delta\varphi = 0.$$

En un point de la surface des conducteurs, on a, en ajoutant les équations (6) multipliées respectivement par l, m, n et tenant compte de la relation (9) :

$$K\mu^2 \sum lL = -\frac{d\varphi}{dn}$$

mais on a par hypothèse en tous les points de la surface :

$$lL + mM + nN = 0$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On en conclut que φ est une constante ; on a donc

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dx}$$

et deux autres équations analogues. Nos six fonctions X, Y, Z, L, M, N satisfont donc bien aux conditions imposées.

Remarquons maintenant que nous avons :

$$U = \int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau = \int \sum X \left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) d\tau$$

ou en intégrant par parties d'après les mêmes règles que plus haut :

$$U = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \sum L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) d\tau.$$

La première des intégrale est nulle, la seconde est égale à $-K\mu^2 T$.

On a donc :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2.$$

D'où la règle suivante : le nombre $K\mu^2$ dont dépend la

période la plus grave, est le minimum de l'expression $\frac{U}{T}$ formée à l'aide de trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2).

On pourrait démontrer d'une manière analogue qu'il existe une infinité de périodes possibles qu'on pourrait appeler des harmoniques supérieures. Mais l'expérience n'ayant rien révélé de pareil, il faut admettre que ces harmoniques sont trop faibles ou trop rapidement décroissantes pour pouvoir être decelées avec les moyens dont nous disposons. Je n'insisterai donc pas sur ce point.

NOTE IV

SUR QUELQUES EXPÉRIENCES RÉCENTES

MM. Sarrazin et de la Rive ont fait au mois de mai dernier (*Archives de Genève*, juin 1890, t. XXIII, page 557) des expériences dont l'importance est considérable. Ils ont fait interférer l'onde émanée d'un excitateur avec la même onde réfléchie sur un mur. C'est la répétition de l'expérience classique de M. Hertz, mais ils ont opéré avec des excitateurs et avec des résonateurs différents et ils ont vu ainsi que la longueur d'onde observée dépend des dimensions du résonateur et est à peu près indépendante des dimensions de l'excitateur. C'est le phénomène de la résonance multiple sur lequel je reviendrai dans la note suivante.

Mais voici le point sur lequel je désirerais attirer l'attention. Opérant avec l'excitateur de Hertz et avec un résonateur de 75 centimètres de diamètre, c'est-à-dire à peu près semblable à celui de Hertz, les savants Génevois ont obtenu un internœud de 3 mètres ; M. Hertz avait trouvé $4^m,80$. Le premier de ces deux résultats s'accorde suffisamment avec la théorie, il n'en est pas de même du second Mais toute considération théorique mise à part, il y a lieu de s'étonner de voir des expériences exécutées dans des conditions en appa-

rence identiques donner des résultats aussi divergents. Il y a donc lieu de réserver ses conclusions en attendant que ce point ait été élucidé.

Dans une lettre que M. Hertz m'a fait l'honneur de m'adresser, et qu'il veut bien m'autoriser à citer ici, l'illustre physicien s'exprime ainsi à ce sujet :

« Il m'est difficile de croire que je me sois trompé dans la deuxième méthode au point de trouver 4^{m},80 au lieu de 3 mètres, mais puisque toute la vraisemblance théorique est du côté de MM. de la Rive et Sarrazin, j'ai bien songé à ce qui en pourrait être la cause et voilà deux manières dont on peut expliquer la différence. Les ondes se produisent entre deux faces parallèles d'une salle ; je n'ai tenu compte que d'une seule face dite réfléchissante. Supposons d'abord que la longueur de la salle soit égale à un multiple exact de la longueur d'onde, disons à trois longueurs d'onde. Nous aurons deux nœuds très prononcés qui auront la distance exacte. Si la longueur de la salle est égale à quatre longueurs d'onde, nous aurons trois nœuds très prononcés. Mais supposons que la longueur de la salle ait une valeur intermédiaire et plus rapprochée de la première, nous aurons deux nœuds moins distincts dont la distance sera plus grande que la véritable longueur d'onde. Cette explication me paraîtrait bonne, si la différence n'était pas trop grande.

» L'autre est celle-ci : Ma table de zinc réfléchissante était établie dans une niche du mur, il serait possible que les points proéminents du mur aient eu l'effet d'éloigner les nœuds du mur et de donner une longueur trop grande aux longueurs mesurées des ondes. Mais il est vrai aussi que la niche était large de 5 à 6 mètres et il ne me semblait pas et ne semble pas

très vraisemblable que cette circonstance ait eu un grand effet.

» Je ne sais donc pas exactement la cause de mon erreur, mais je crois qu'il y en a. J'ai depuis longtemps cherché en vain pour trouver une cause plausible pour la différence de la vitesse dans l'air et dans les fils, j'ai trouvé moi-même, avant MM. Sarrazin et de la Rive, qu'il n'y a pas de différence pour les ondes courtes de 30 centimètres de longueur ; enfin les expériences de ces messieurs donnent la même vitesse aussi pour les ondes de grande longueur et contredisent mes expériences. »

Devons-nous donc croire que, les dimensions de la niche étant du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, il a pu se produire des phénomènes de diffraction et que M. Hertz a observé des franges de diffraction et non les franges d'interférence proprement dite? Il serait bien prématuré de se prononcer sur ce point. Il convient d'imiter la sage réserve de M. Hertz et de s'abstenir de conclure jusqu'à ce que de nouvelles expériences aient éclairci la question.

J'ai parlé aussi plus haut d'un mémoire de M. Lecher (*Sitzungsberichte de l'Académie de Vienne*, avril 1890) et j'ai dit que ce savant ayant mesuré par un procédé nouveau la vitesse de propagation d'une perturbation dans un conducteur, a trouvé que cette vitesse était celle de la lumière. Très étonné de se trouver en contradiction avec M. Hertz, il a vainement cherché la cause de cette divergence. Elle s'explique aujourd'hui très aisément. M. Lecher ayant appliqué correctement la formule de Thomson pour la période de vibration (où M. Hertz avait oublié le facteur $\sqrt{2}$,) son résultat se trouve en accord suffisant avec le résultat corrigé de M. Hertz.

NOTE V

SUR LA RÉSONANCE MULTIPLE

MM. Sarrasin et de la Rive ont observé que dans les phénomènes d'interférence, la longueur d'onde observée dépend des dimensions du résonateur et fort peu de celles de l'excitateur. C'est le phénomène qu'ils ont appelé résonance multiple et dont ils ont donné l'interprétation suivante :

L'excitateur ne donnerait naissance ni à une vibration unique de période parfaitement déterminée, ni même à un certain nombre d'harmoniques distinctes ; son spectre, si j'ose m'exprimer ainsi, ne serait formé ni d'une, ni de plusieurs raies fines et distinctes ; ce serait un spectre continu ou plutôt il serait formé d'une bande très large dont les bords seraient fortement estompés.

Il convient d'ajouter que cette bande paraît beaucoup plus large dans les expériences où l'on fait interférer les ondes dans un fil métallique que dans celles où on les fait interférer dans l'air. Le résonateur renforcerait ensuite, parmi toutes les vibrations émises par l'excitateur, celle qui serait d'accord avec sa période propre.

Cette interprétation est évidemment en désaccord avec la théorie ; mais ce n'est pas là un argument à invoquer contre

elle ; car cette théorie est encore bien mal établie et lors même qu'elle le serait, elle ne serait encore qu'une première approximation.

J'ai proposé néanmoins une explication différente que j'ai communiquée par lettre à quelques savants. Bien que je ne l'ai mise en avant que timidement, je crois devoir la reproduire ici.

Dans la vibration émise par un excitateur, deux choses sont à considérer, la période et le décrément logarithmique. Diverses raisons me portent à penser que ce décrément est beaucoup plus grand pour l'excitateur que pour le résonateur. L'intensité des vibrations émises par l'excitateur irait donc en diminuant très rapidement de telle sorte qu'elles seraient de durée très courte et peu capables d'interférer. Il n'en serait pas de même des vibrations propres du résonateur. Qu'arriverait-il alors? Le résonateur serait mis en train par l'excitateur, pourvu que les périodes ne soient pas très différentes, puis il continuerait à vibrer après que l'excitateur serait revenu au repos ; mais il vibrerait alors *avec sa période propre* et ce sont ces dernières vibrations, d'une durée beaucoup plus longue et susceptibles d'interférer, que l'on observerait.

M. Hertz à qui j'avais communiqué cette manière de voir m'a répondu ce qui suit :

« Les expériences de MM. Sarrasin et de la Rive sur l'usage de divers résonateurs me plaisent beaucoup et me semblent fort belles, mais leur explication par un spectre continu émis par le primaire me déplaît absolument. Ma manière de voir est certainement très rapprochée de la vôtre ; peut-être est-elle tout à fait la même. Si le primaire produisait une vibra-

tion régulière et continue, représentée par la sinusoïde A, il ferait vibrer les résonateurs en harmonie mille fois mieux que les autres. S'il ne produisait qu'un simple choc, il ferait vibrer tous les résonateurs également bien. La vérité est entre ces deux extrêmes; la vibration du primaire aura la forme B (une courbe représentant une série d'oscillations d'amplitude décroissante). Elle fera donc vibrer tous les résonateurs, mais ceux qui sont en harmonie mieux que les autres.

« Ou la même chose prise mathématiquement : si nous voulons représenter la forme A comme une somme de sinus, nous n'aurons qu'un seul membre. Si nous voulons représenter la forme B, nous devrons employer une intégrale de Fourier qui contiendra un nombre infini de sinus de toutes longueurs. Mais on ne saurait dire pour cela que la forme B n'ait pas de période distincte ni qu'elle soit équivalente à un spectre continu. »

Bien qu'exprimée en termes absolument différents, l'opinion de M. Hertz est donc parfaitement d'accord avec celle que j'ai cru pouvoir émettre plus haut.

Quoique la complication des phénomènes se prête assez mal au calcul, je ne crois pas inutile de donner ici un petit développement analytique qui se rapporte à un cas plus simple que la réalité mais certainement analogue.

L'équation qui exprime un mouvement vibratoire décroissant quelconque peut toujours se ramener à la forme

$$y'' - 2\alpha y' + \beta y = 0$$

y désignant une variable convenablement choisie qui définit l'amplitude de la vibration ; y' et y'' ses dérivées par rapport

au temps, α et β des constantes. L'intégrale de cette équation est

$$y = e^{-\alpha t}(\mathrm{A}\cos mt + \mathrm{B}\sin mt) \qquad m = \sqrt{\beta - \alpha^2}$$

m définit ainsi la période et α le décrément. Si ce décrément est négligeable (et nous supposons par une approximation grossière qu'il en est ainsi pour les résonateurs) $\alpha = o$, $\beta = m^2$ et il reste

$$y'' + m^2 y = 0.$$

Si le mouvement est troublé par une perturbation émanée de l'excitateur et que a et n désignent respectivement deux nombres dont dépendent le décrément et la période propres de l'excitateur, cette équation deviendra :

$$y'' + m^2 y = \mathrm{A}e^{-at}\cos nt + \mathrm{B}e^{-at}\sin nt$$

L'intégrale de cette équation est :

$$y = \mathrm{A}_1 e^{-at}\cos nt + \mathrm{B}_1 e^{-at}\sin nt + \mathrm{C}\cos mt + \mathrm{D}\sin mt$$

avec les conditions :

$$\mathrm{A}_1(m^2 + a^2 - n^2) - 2an\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}$$
$$\mathrm{B}_1(m^2 + a^2 - n^2) + 2an\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine des temps on ait :

$$y = y' = 0$$

il viendra :

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{C} = 0 \qquad -\mathrm{A}_1 a + \mathrm{B}_1 n + \mathrm{D}m = 0.$$

Au bout d'un temps très grand, les termes qui contiennent l'exponentielle e^{-at} disparaîtront de sorte qu'il restera

$$y = \mathrm{C}\cos mt + \mathrm{D}\sin mt$$

et que l'amplitude de l'oscillation sera proportionnelle à :

$$\sqrt{C^2 + D^2}$$

Si a est très petit et m très voisin de n ; cette quantité diffère très peu de :

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}}.$$

L'amplitude de la vibration excitatrice restant constante, celle de la vibration résultante est en raison inverse du radical

$$\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}.$$

Quand m varie, ce radical admet un minimum égal à $2\,an$ pour $m^2 = n^2 - a^2$. Ce minimum correspond au résonateur en harmonie.

Si a est nul, ce minimum est nul, l'amplitude correspondante infinie et le résonateur en harmonie vibre, comme le dit M. Hertz, mille fois mieux que les autres.

Si a n'est pas nul, ce minimum n'est pas nul et l'amplitude de vibration du résonateur en harmonie est plus grande que celle des autres, mais du même ordre de grandeur.

Doit-on admettre que l'excitateur a un décrément plus grand quand on lui adjoint deux fils conducteurs très longs pour mesurer la propagation dans les fils, que quand il en est débarrassé? Cela expliquerait pourquoi la « bande spectrale » apparente est plus large dans le premier cas que dans le second.

Doit-on admettre qu'un résonateur rectiligne et ouvert a

un décrément plus grand qu'un résonateur circulaire? Cela expliquerait peut-être pourquoi l'on n'a pu obtenir d'interférences dans les fils avec les résonateurs rectilignes.

Mais toutes ces questions sont bien prématurées et ce n'est que dans un grand nombre d'années qu'il pourra être utile de les poser. D'ailleurs d'autres explications sont possibles.

NOTE VI

SUR LA PROPAGATION DES ONDES DANS LES FILS SINUEUX

La vitesse de propagation d'une onde dans un fil présentant de petites sinuosités peut s'évaluer de deux manières différentes. Le chemin parcouru par cette onde peut se compter en effet, soit en suivant toutes les sinuosités du fil, soit en projetant ce chemin sur la droite parallèle à la direction moyenne du fil. La vitesse évaluée de la seconde manière sera évidemment beaucoup plus faible.

Les expériences de M. Hertz ont prouvé que la vitesse évaluée de la première manière est plus grande que la vitesse mesurée dans un fil tendu, tandis que la vitesse évaluée de la seconde manière est au contraire plus petite que dans un fil tendu et souvent beaucoup plus petite.

En appelant ds l'élément d'arc du fil et i l'intensité du courant dans ce fil, on arriverait en répétant le raisonnement que nous avons fait dans la théorie du résonateur à l'équation suivante :

$$\frac{d^2i}{ds^2} = K^2 \frac{d^2i}{dt^2}.$$

Cette équation prouve que la vitesse évaluée de la première

manière est égale à $\frac{1}{K}$ c'est-à-dire à la vitesse de la lumière, ou encore à la vitesse dans un fil tendu.

Mais le raisonnement qui nous a conduit à cette équation suppose que le diamètre du fil est très petit ; mais ce n'est pas tout à fait le cas ici, car si le fil est tordu en hélice comme dans les expériences de M. Hertz, le pas de cette hélice sera trop petit pour qu'on puisse négliger devant lui le diamètre du fil.

Si le diamètre du fil est presque égal au pas de l'hélice de façon que les spires se touchent presque, il semble que le fil doit se rapprocher de la condition d'un fil tendu et que par conséquent la vitesse évaluée de la seconde manière doit se rapprocher de $\frac{1}{K}$. On expliquerait ainsi le résultat obtenu par M. Hertz. Mais ce n'est là qu'un aperçu et il conviendrait d'étudier la question avec attention.

NOTE VII

SUR LA RÉFLEXION DES ONDES

La plupart des expérimentateurs ont trouvé que les ondes se réfléchissent totalement sur une surface conductrice, quelque mince qu'elle soit, et qu'aucune étincelle n'est perceptible de l'autre côté d'une pareille surface. Cela est vrai même avec les électrolytes et si MM. Bichat et Blondlot ont trouvé que l'eau de rivière est transparente, elle cesse de l'être dès qu'on y ajoute une trace d'acide.

Au contraire M. Joubert a reconnu qu'un mur de zinc de 1/2 millimètre d'épaisseur de 4 mètres de hauteur et de 8 mètres de largeur affaiblit les étincelles sans les détruire complètement et qu'on peut encore les observer de l'autre côté de ce mur ; cette divergence est due sans doute à l'emploi du résonateur rectiligne plus sensible que les résonateurs circulaires. Ce phénomène est en désaccord avec la théorie de Maxwell à moins qu'on ne puisse l'expliquer par la diffraction, la hauteur du mur n'étant que d'une demi longueur d'onde ; mais nous ne sommes pas encore en état de décider cette question.

CONCLUSIONS

La théorie est incomplète, les expériences sont peu nombreuses et contradictoires. Il est donc imposible de décider s'il y a accord ou désaccord. Je termine encore par un point d'interrogation. Toutefois, s'il m'est défendu de conclure, je puis parler de l'impression qui me causent les plus récents progrès de la science, et que le lecteur partagera sans doute après avoir lu ces notes. Cette impression encore bien vague est que l'ensemble des résultats est plus favorable aujourd'hu à la théorie de Maxwell qu'il y a quelques mois au moment où j'ai clos mon cours.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE VI

CHAPITRE VII

CHAPITRE VIII

CHAPITRE IX

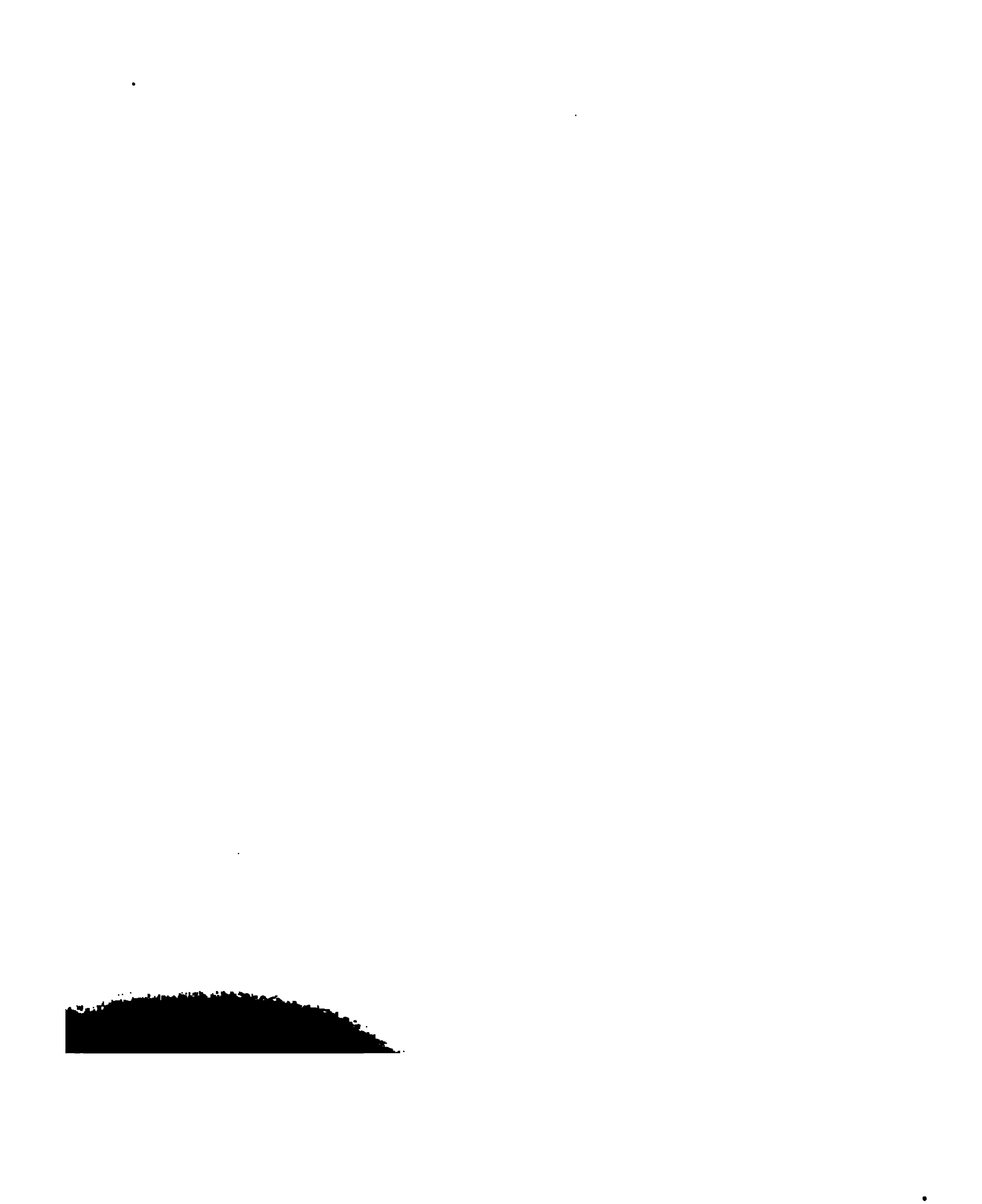
CHAPITRE X

CHAPITRE XI

CHAPITRE XII



Tours. — Imprimerie Deslis Frères.



λ pg. D. II 56, 57.

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ p. D. II pg. 111.

$\lambda = 0$ D. II pg. 112.

